

Troisième

1. Calculs numériques et PGCD
2. Racines carrées
3. Calcul littéral et identités remarquables
4. Statistiques
5. Proportionnalité
6. Notations géométriques
7. Géométrie plane et Thalès
8. Trigonométrie
9. Equations et inéquations
10. Fonctions linéaires et affines
11. Systèmes
12. Angles inscrits
13. Translations. Vecteurs. Rotations
14. Vecteurs et coordonnées
15. Géométrie dans l'espace et sphère

Le plus grand commun diviseur ou PGCD

$a, b, k \neq 0$ sont des nombres entiers naturels

1) Diviseurs d'un entier:

Quand $\frac{a}{k}$ est un entier naturel, k est un diviseur de a .

On dit aussi que a est un multiple de k ou encore que a est divisible par k .

$$\frac{18}{3} = 6 \quad 6 \text{ est un diviseur de } 18; 3 \text{ est un diviseur de } 18 \text{ et } 18 = 3 \times 6$$

2) Diviseurs communs à deux entiers naturels:

Si deux entiers a et b sont divisibles par un même entier k , on dit que k est un diviseur commun de a et b .

$36 = 12 \times 3$ et $24 = 12 \times 2$ donc 12 est un diviseur commun de 36 et 24.

On peut remarquer que 1 est un diviseur commun de tous les nombres entiers.

Si deux entiers ont pour seul diviseur commun 1, on dit qu'ils sont premiers entre eux.

3) Propriétés des diviseurs communs:

Si k est un diviseur commun aux entiers a et b , avec $a > b$, alors k est aussi un diviseur de $(a-b)$ et de $(a+b)$.

$65 = 13 \times 5$ et $26 = 13 \times 2$, 13 est diviseur commun de 65 et 26
donc $65+26 = 91$ et $65-26 = 39$ sont divisibles par 13.

4) PGCD:

La liste des diviseurs de 24 est: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

La liste des diviseurs de 36 est: 1; 2; 3; 4; 6; 12; 18; 36.

36 et 24 ont pour diviseurs communs: 1; 2; 3; 4; 6 et 12.

Le plus grand diviseur commun de 36 et 24, ou de 24 et 36 est 12.

On le désigne par $\text{PGCD}(36;24)$.

$$\text{PGCD}(36;24) = \text{PGCD}(24;36) = 12.$$

Propriété 1:

Si a est diviseur de b ; alors $\text{PGCD}(a; b) = a$

Propriété 2:

Pour $a > b$; $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a-b; b)$

5) Deux méthodes pour calculer le PGCD:

On cherche $\text{PGCD}(261;203)$

1. Méthode des soustractions:

$$\begin{array}{r} 261 \\ -203 \\ \hline 58 \end{array} \quad \begin{array}{r} 203 \\ -58 \\ \hline 145 \end{array} \quad \begin{array}{r} 145 \\ -58 \\ \hline 87 \end{array} \quad \begin{array}{r} 87 \\ -58 \\ \hline 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 58 \\ -29 \\ \hline 29 \end{array}$$

Il y a deux nombres égaux dans la dernière soustraction, $\text{PGCD}(261;203) = 29$.

2. Méthode de la division, dite de l'algorithme d'Euclide:

$$\begin{array}{r} 261 \overline{) 203} \\ 58 \overline{) 1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 203 \overline{) 58} \\ 29 \overline{) 3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 58 \overline{) 29} \\ 0 \overline{) 2} \end{array}$$

On s'arrête quand le reste est nul; le PGCD est le dernier reste non nul. $\text{PGCD}(261;203) = 29$

6) Fractions irréductibles:

Quand le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, on dit que cette fraction est irréductible.

On dit aussi qu'on ne peut plus la simplifier.

En simplifiant la fraction $\frac{a}{b}$ par PGCD($a;b$), on obtient une fraction irréductible.

Il est parfois utile d'appliquer d'abord les critères de divisibilité.
 $\frac{2610}{2030} = \frac{10 \times 9 \times 29}{10 \times 7 \times 29} = \frac{9}{7}$ est une fraction irréductible.

Racine carrée

x est un nombre relatif; a et b sont des nombres positifs.

1) Rappels:

$x^2 = x \times x$ donc en vertu de la règle des signes, x^2 est toujours positif.
Si $a > 0$ et $b > 0$ avec $a > b$ alors $a^2 > b^2$

2) Racine carrée positive:

Pour tout nombre a positif il existe un nombre x positif tel que $x^2 = a$

On dit que x est la racine carrée de a et on écrit $x = \sqrt{a}$.

$$x^2 = a \quad \text{alors} \quad x = \sqrt{a} \quad a \geq 0 \quad \text{et} \quad x \geq 0$$

3) L'équation $x^2 = a$:

Si $a < 0$ l'équation n'a pas de solution.

Si $a = 0$ alors $x = 0$

Si $a > 0$ alors $x = +\sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$ sont les deux solutions.

4) Propriétés:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a \times b} &= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

5) Quelques calculs:

$$\begin{aligned} \sqrt{8} &= \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} \\ \sqrt{\frac{75}{12}} &= \sqrt{\frac{3 \times 25}{3 \times 4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \\ (2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} - 2) &= 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} \times 2 + 1 \times 3\sqrt{5} - 1 \times 2 \\ &= 6 \times 5 - 4 \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{5} - 2 \\ &= 30 - \sqrt{5} - 2 \\ &= 28 - \sqrt{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} &= \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Calcul littéral

a, b, m, n et x sont des nombres relatifs.

1) Rappels:

Le résultat d'une addition est une somme.

Le résultat d'une soustraction est une différence.

Le résultat d'une multiplication est un produit.

Le résultat d'une division est un quotient.

Le nom d'un calcul est donné par le dernier effectué.

Le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif.

Le produit de deux nombres de signes différents est un négatif.

Quant on enlève une parenthèse précédée du signe $-$, on écrit les opposés du contenu de cette parenthèse.

Distributivité:

$$m(a+b)=ma+mb$$

$$m(a-b)=ma-mb$$

$$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$$

$$(a-b)(m+n)=am+an-bm-bn$$

$$(a-b)(m-n)=am-an-bm+bn$$

	$\xrightarrow{\text{Développer}}$	
	$\xleftarrow{\text{Factoriser}}$	
$a^2 = a \times a$	$a^3 = a \times a \times a$	$(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$

2) Les produits remarquables:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3) Développer:

$$5(x + 3) = 5x + 15$$

$$8(2x - 5) = 16x - 40$$

$$\begin{aligned} (2x + 1)(3x + 4) &= (2x)(3x) + 4(2x) + 1(3x) + 4 \times 1 \\ &= 6x^2 + 8x + 3x + 4 \\ &= 6x^2 + 11x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5x - 3)(3x - 4) &= (5x)(3x) - 4(5x) - 3(3x) + 3 \times 4 \\ &= 15x^2 - 20x - 9x + 12 \\ &= 15x^2 - 29x + 12 \end{aligned}$$

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2(2x) \times 3 + 3^2 \\ = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2(3x) \times 5 + 5^2 \\ = 9x^2 - 30x + 25$$

$$(7x + 4)(7x - 4) = (7x)^2 - 4^2 \\ = 49x^2 - 16$$

4) Factoriser:

Questions à se poser pour factoriser:

- a) peut on mettre en évidence: ♦ un nombre en commun ?
♦ une lettre, ou inconnue, en commun ?
♦ une expression, une parenthèse, en commun ?
♦ un produit remarquable ?
- b) a t-on bien mis les termes dans le même ordre que dans l'énoncé, avec les bons signes?
- c) par quoi faut-il multiplier (l'expression en facteur) pour obtenir (le terme proposé) ?.

exemple : $(2x+3)^2 - (2x+3)(5x-1)$.

l'expression $(2x+3)$ est en commun, on va donc la mettre en facteur commun ;

on a $(2x+3)^2 - (2x+3)(5x-1) = (2x+3)(\dots\dots\dots)$

par quoi faut-il multiplier $(2x+3)$ pour obtenir $(2x+3)^2$? par $(2x+3)$ qui est le premier terme dans la parenthèse ; on a $(2x+3)^2 - (2x+3)(5x-1) = (2x+3)((2x+3)\dots\dots\dots)$;

par quoi faut-il multiplier $(2x+3)$ pour obtenir $(2x+3)(5x-1)$? par $(5x-1)$ qui est le deuxième terme de la parenthèse ; on a $(2x+3)^2 - (2x+3)(5x-1) = (2x+3)((2x+3)\dots\dots(5x-1))$

quel est le signe séparant les termes dans le calcul ? - ;

donc $(2x+3)^2 - (2x+3)(5x-1) = (2x+3)((2x+3) - (5x-1))$

il ne reste plus qu'à réduire la parenthèse.

$$8x - 4 = 4(2x - 1)$$

$$7x^2 + 5x = x(7x + 5)$$

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$$

$$36x^2 + 60x + 25 = (6x + 5)^2$$

$$(3x + 2)(5x + 7) - (3x + 2)(2x - 5) = (3x + 2)[(5x + 7) - (2x - 5)] \\ = (3x + 2)(5x + 7 - 2x + 5) \\ = (3x + 2)(3x + 12)$$

Remarques sur les produits remarquables et les racines carrées :

$$(\sqrt{2}+5)^2 = \sqrt{2}^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 5 + 5^2 = 2 + 10 \sqrt{2} + 25 = 27 + 10 \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}(3\sqrt{2}+4)^2 &= (3\sqrt{2})^2 + 2 \times (3\sqrt{2}) \times 4 + 4^2 = 3^2 \times \sqrt{2}^2 + 24\sqrt{2} + 16 = 9 \times 2 + 24\sqrt{2} + 16 \\ &= 18 + 24\sqrt{2} + 16 = 34 + 24\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5\sqrt{3}+2\sqrt{7})^2 &= (5\sqrt{3})^2 + 2 \times 5\sqrt{3} \times 2\sqrt{7} + (2\sqrt{7})^2 = 5^2 \times \sqrt{3}^2 + 2 \times 5 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} + 2^2 \times \sqrt{7}^2 \\ &= 75 + 20\sqrt{21} + 28 = 103 + 20\sqrt{21}\end{aligned}$$

Statistiques**Les notes obtenues à un devoir sont:****10, 6, 17, 14, 8, 7, 16, 8, 17, 8, 11, 8, 18, 18, 9, 16, 8, 7, 12, 19, 7, 9, 15, 9, 9, 15, 9, 16, 18, 19.****1) Tableau:**

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectifs	1	3	5	5	1	1	1	0	1	2	3	2	3	2
Effectifs cumulés	1	4	9	14	15	16	17	17	18	20	23	25	28	30
Effectifs décumulés	30	29	26	21	16	15	14	13	13	12	10	7	5	2
Fréquence %	3,3	10	16,6	16,6	3,3	3,3	3,3	0	3,3	6,6	10	6,6	10	6,6

Calcul de la fréquence : $(\text{effectif} \div \text{total}) \times 100$ (le total des fréquences doit être très proche de 100)La différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la variable (ici la note) donne l'amplitude de la série. Ici l'amplitude est $(19-6=13)$ 13.

Calcul des effectifs cumulés:

Effectifs	1	3	5	5
Effectifs cumulés	1	4	9	14

Calcul des effectifs décumulés :

Effectifs		3	2	3	2
Effectifs décumulés		10	7	5	2

Si on regarde les effectifs cumulés, on peut répondre aux questions du genre : combien y a-t-il de notes égales ou inférieures à 10 ? réponse 15.

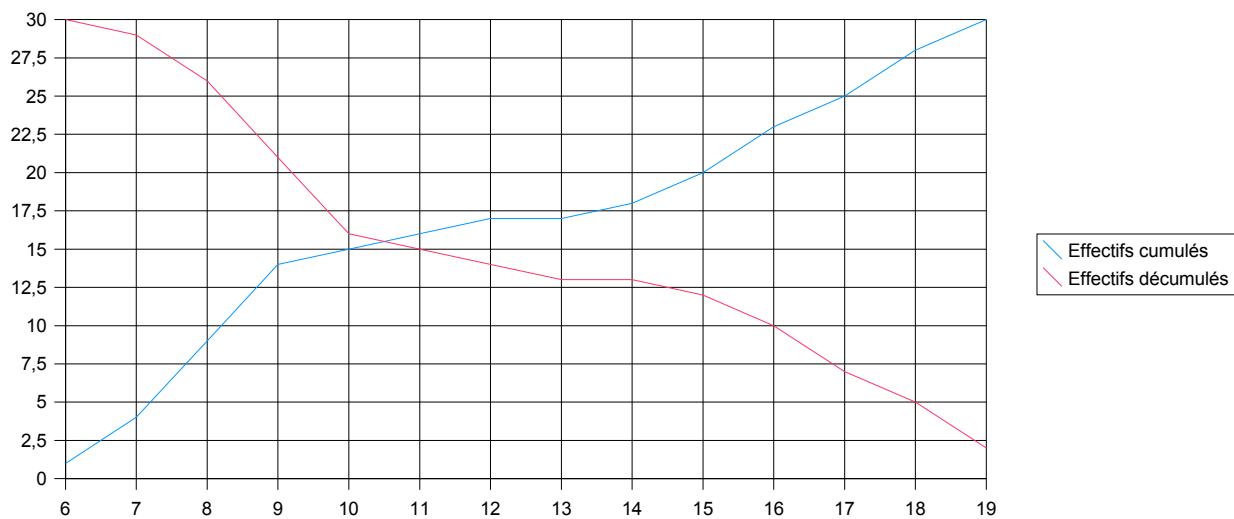
Si on regarde les effectifs décumulés, on peut répondre aux questions du genre : combien y a-t-il de notes égales ou supérieures à 10 ? réponse 16.

2) Calcul de la moyenne: 12,1

Méthode 1: on additionne toutes les notes et on divise par le nombre de notes.

Méthode 2: on utilise le tableau et on additionne $(\text{note}) \times (\text{effectifs})$ puis on divise par le nombre de notes. Dans ce cas on dit que l'on a fait un calcul pondéré.

$$\frac{6 \times 1 + 7 \times 3 + 8 \times 5 + 9 \times 5 + 10 \times 1 + 11 \times 1 + 12 \times 1 + 13 \times 0 + 14 \times 1 + 15 \times 2 + 16 \times 3 + 17 \times 2 + 18 \times 3 + 19 \times 2}{30} = \frac{363}{30} = 12,1$$

3) Médiane:10,5

La médiane est la note permettant de séparer l'effectif total en deux effectifs égaux (ici 10,5 est la note qui partage l'effectif total de 30 en deux parties égales).

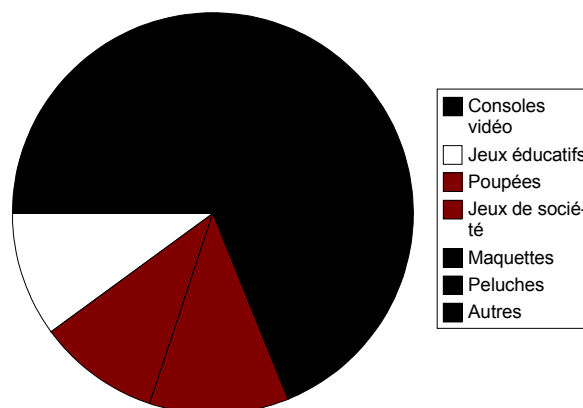
On peut dire que 15 élèves ont 10,5 ou moins et que 15 élèves ont 10,5 ou plus.

En général la médiane et la moyenne sont différentes.

4) Diagrammes circulaires ou demi circulaires:

Les Résultats d'une enquête auprès de 1 000 000 familles concernant l'achat de jouets en 1991:

Consoles vidéo	Jeux éducatifs	Poupées	Jeux de société	Maquettes	Peluches	Autres	Total
400 000	160 000	160 000	176 000	224 000	368 000	112 000	1 600 000
25,00%	10,00%	10,00%	11,00%	14,00%	23,00%	7,00%	100,00%
90°	36°	36°	39,5°	50,5°	83°	25°	360°



Pour calculer les pourcentages $(\text{effectif} \div \text{effectif total}) \times 100$. Comme pour les fréquences .
 Pour calculer les angles multiplier 360 par les pourcentages dans le cas d'un diagramme circulaire
 et 180 par les pourcentages dans le cas d'un diagramme demi circulaire.

La proportionnalité

x , y , t et k sont des nombres relatifs.

1) Représentation graphique d'une situation de proportionnalité:

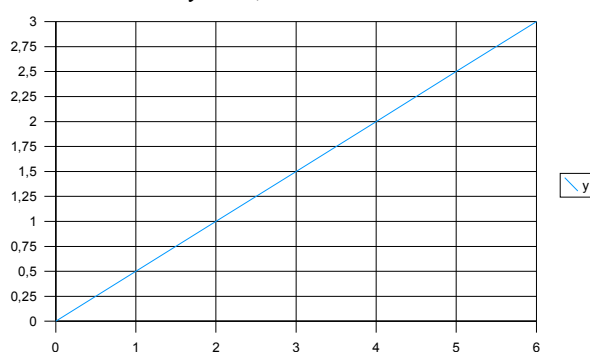
Si deux grandeurs sont proportionnelles elles sont représentées graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère.

Exemple:

x	2	3	4	6
y	1	1,5	2	3

 $\times 0,5$

$$y = 0,5x$$



Si deux grandeurs sont représentées graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère, alors elles sont proportionnelles.

Un tableau représente une situation de proportionnalité si on passe d'une ligne à l'autre en multipliant toujours par le même nombre appelé coefficient de proportionnalité.

Dans l'exemple, le coefficient de proportionnalité est 0,5. $y = 0,5x$

2) Pourcentages:

Augmenter une quantité de t % revient à multiplier cette quantité par $1 + \frac{t}{100}$.

Une boîte de 400 g est vendue avec 25% de produit en plus, sa nouvelle masse, en grammes est

$$m = 400 \times \left(1 + \frac{25}{100}\right) = 400 \times 1,25 = 500 \quad m = 500\text{g}$$

Diminuer une quantité de t % revient à multiplier cette quantité par $1 - \frac{t}{100}$.

En France une baisse de 4% a été enregistrée sur un effectif annuel de 750 000 naissances. Le

nouvel effectif est $N = 750\,000 \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 750\,000 \times 0,96 = 720\,000$

3) Exemples de grandeurs composées:

a) Grandeurs quotients:

le prix au litre d'un liquide est le quotient du prix P (en €) du liquide par son volume V (en L) $p = \frac{P}{V}$ en euro par litre (€L^{-1}).

La densité de population d'un pays est le quotient du nombre N de ses habitants par sa superficie S (en km^2) $d = \frac{N}{S}$ en habitants par km^2 (habitants.km^{-2}).

b) Grandeurs produits:

L'aire d'un rectangle s'exprime en fonction de sa longueur L (en m) et de sa largeur (l) (en m) par le produit $A = L \times l$ en mètres carrés (m^2).

Le volume d'un cube de côté c s'exprime en fonction de c (en m) par le produit $V = c \times c \times c = c^3$ en mètres cubes (m^3).

c) Grandeurs dérivées:

La puissance p reçue du Soleil par unité de surface sur la Terre est le quotient de la puissance P émise par le Soleil, par l'aire A de la Terre dont le rayon est R (en m)

$$p = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi R^2} \quad p \text{ est une grandeur dérivée dont l'unité est watt par mètre carré } (\text{Wm}^{-2}).$$

4) Réduction et agrandissement:

Quand on agrandit ($k > 1$) ou on réduit ($0 < k < 1$) une figure, si les dimensions sont multipliées par k alors l'aire est multipliée par k^2 .

Quand on agrandit ou on réduit un solide, si les dimensions sont multipliées par k alors le volume est multiplié par k^3 .

Notations Géométriques

A, B, M : points.

d : droite.

(AB) : droite passant par les points A et B.

(xy) ou xy : droite.

(xx') ou (yy') : axe (droite munie d'une graduation et d'une origine souvent notée O).

[AB]: segment d'origine A et d'extrémité B. (remarque: [AB]=[BA]).

AB : longueur du segment [AB].

[Ax) ou [Ax : demi-droite d'origine A, A inclus.

]Ax) ou]Ax : demie- droite d'origine A, A exclu.

$A(a)$: le point A a pour abscisse "a" sur un axe. ex: $A(-2)$

$A(a;b)$: le point A a pour coordonnées "a" et "b". ex: $A(-1;3)$

$A(\text{abscisse} ; \text{ordonnée}).$

[AB]: A et B inclus $a \leq x \leq b$

]AB[: A et B exclus $a < x < b$

[AB[: A inclus et B exclu $a \leq x < b$

]AB]: A exclu et B inclus $a < x \leq b$

Parallèle : // (s'emploie pour deux droites).

Perpendiculaire: $\perp$ (s'emploie pour deux droites)

appartient à; est élément de: $\in$

$\widehat{ABC}$: angle saillant (mesure inférieure à 180°)

$\widetilde{ABC}$: angle rentrant (mesure supérieure à 180°)

Angle aigu: angle saillant dont la mesure est inférieure à 90° .

Angle obtus: angle saillant dont la mesure est comprise entre 90° et 180° .

$\vec{v}$: vecteur $\vec{v}$

$\|\vec{v}\|$: norme ou longueur du vecteur $\vec{v}$

$\vec{AB}$: vecteur $\vec{AB}$, d'origine A et d'extrémité B.

$\|\vec{AB}\|$: norme ou longueur du vecteur $\vec{AB}$.

Le théorème de Thalès**1) Rappels:**

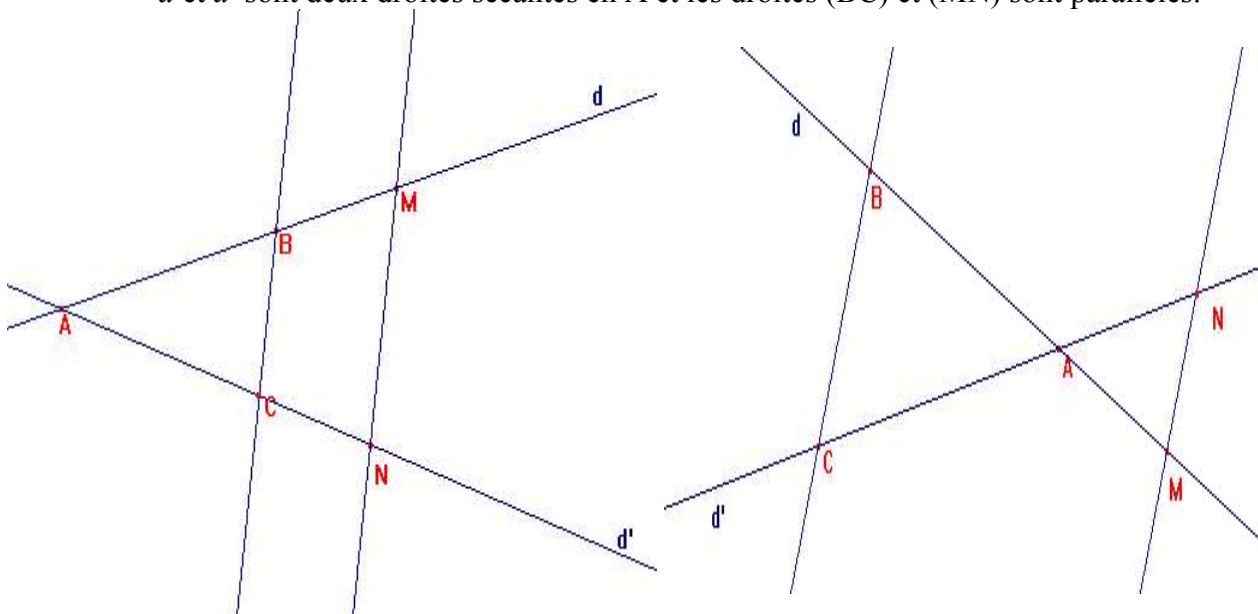
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

Si deux droites sont parallèles avec un point commun alors elles sont confondues

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{alors le produit en croix donne } a \times d = c \times b$$

2) Les situations de Thalès:

d et d' sont deux droites sécantes en A et les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

**3) Le théorème de Thalès:**

Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A.

Soit B et M deux points de (d) distincts de A.

Soit C et N deux points de (d') distincts de A

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Remarques : Si les rapports $\frac{AM}{AB}$; $\frac{AN}{AC}$; $\frac{MN}{BC}$ sont différents alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Pour écrire les rapports : $\frac{\text{côtés d'un triangle}}{\text{côtés correspondants de l'autre triangle}}$

4) La réciproque du théorème de Thalès:

Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A.

Soit B et M deux points de (d) distincts de A.

Soit C et N deux points de (d') distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre,

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

5) Exemples:

Le Théorème de Thalès:

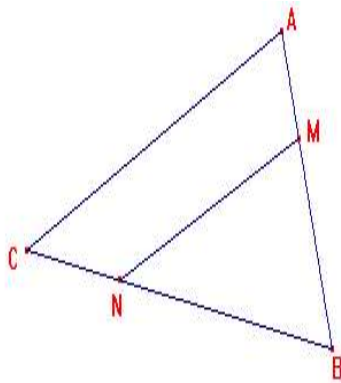
On utilise dans les calculs la technique des "produits en croix":

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } a \times d = b \times c$$

ABC est un triangle avec $AB=4\text{cm}$; $AC=5\text{cm}$ et $BC=6\text{cm}$.

Sur le segment $[AB]$ on place M tel que $BM=3\text{cm}$. La parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en N.

Calculer BN et MN.



(AB) et (AC) sont sécantes en A ; $M \in (AB)$ et $N \in (BC)$

et $(MN) \parallel (AC)$. Le théorème de Thalès donne : $\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$

$$\text{donc } \frac{4}{3} = \frac{6}{BN} = \frac{5}{MN}$$

$$\text{On a } \frac{4}{3} = \frac{6}{BN} \text{ donc } 4BN = 6 \times 3 = 18 \text{ et } BN = \frac{18}{4} = 4,5$$

$$\text{On a } \frac{4}{3} = \frac{5}{MN} \text{ donc } 4MN = 3 \times 5 = 15 \text{ et } MN = \frac{15}{4} = 3,75$$

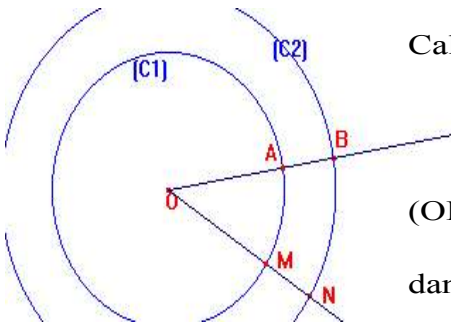
La réciproque du Théorème de Thalès:

Soit (C_1) et (C_2) deux cercles de même centre O et de rayons r_1 et r_2 .

Une demi-droite D issue de O coupe (C_1) en A et (C_2) en B.

Une demi-droite D' issue de O coupe (C_1) en M et (C_2) en N.

Démontrer que les droites (AM) et (BN) sont parallèles.



Calcul de $\frac{OA}{OB}$ et de $\frac{OM}{ON}$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{r_1}{r_2} \text{ et } \frac{OM}{ON} = \frac{r_1}{r_2} \text{ donc } \frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON}$$

(OB) et (ON) sont sécantes en O, on a O, A, B et O, M, N

dans le même ordre; $(A \in (OB) \text{ et } M \in (ON))$ et $\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON}$;

la réciproque du théorème de Thalès donne $(AM) \parallel (BN)$.

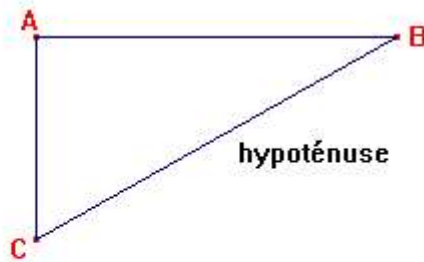
La trigonométrie

La trigonométrie s'applique aux triangles rectangles.

1) Le théorème de Pythagore et sa réciproque:

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

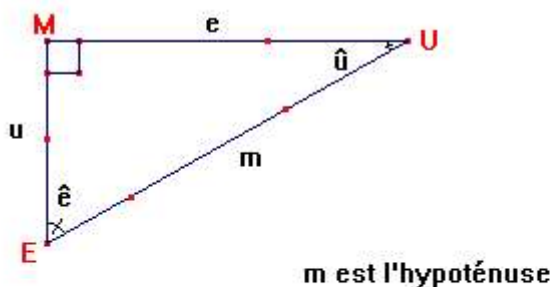
Réciproquement, si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors ce triangle est rectangle.



Théorème de Pythagore: ABC triangle rectangle alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Réciprque de Pythagore: Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC triangle rectangle

2) Notations dans un triangle rectangle:



Pythagore: $m^2 = e^2 + u^2$

Pour l'angle $\hat{e}$; e est le côté opposé, u est le côté adjacent

Pour l'angle $\hat{u}$, u est le côté opposé, e est le côté adjacent

3) Les lignes trigonométriques:

cosinus d'un angle est égal au rapport $\frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

sinus d'un angle est égal au rapport $\frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

tan gente d'un angle est égal au rapport $\frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$

$$\text{On a } \cos \hat{e} = \frac{u}{m}; \quad \sin \hat{e} = \frac{e}{m}; \quad \tan \hat{e} = \frac{e}{u}$$

$$\text{On a } \cos \hat{u} = \frac{e}{m}; \quad \sin \hat{u} = \frac{u}{m}; \quad \tan \hat{u} = \frac{u}{e}$$

Le cosinus et le sinus d'un angle sont toujours compris entre 0 et 1.

4) Propriétés:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{Pour tout angle aigu } \alpha \neq 90^\circ; \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

5) Utilisation de la calculette:

Il faut connaître les séquences de touches pour trouver

$$\cos 27^\circ \approx 0,891 \quad \sin 27^\circ \approx 0,454 \quad \tan 27^\circ \approx 0,510$$

$$\cos \alpha = 0,6 \quad \text{alors } \alpha \approx 53^\circ$$

$$\sin \beta = 0,6 \quad \text{alors } \beta \approx 37^\circ$$

$$\tan \gamma = 0,6 \quad \text{alors } \gamma \approx 31^\circ$$

Equations

a, b, c, d, x et y sont des nombres relatifs.

1) Rappels:

$3 \times 12 + 5 = 41$ est une égalité ;

$3x + 5 = 41$ est une équation qui n'est vraie que pour $x=12$; on dit que 12 est la solution de l'équation.

Résoudre une équation c'est trouver la valeur qu'il faut donner à l'inconnue pour que l'équation devienne une égalité. Les valeurs de l'inconnue qui conviennent forment la solution de l'équation.

Propriétés: 1) Si $a = b$ alors $a + c = b + c$

2) Si $a = b$ alors $a - c = b - c$

3) Si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$

4) Si $a = b$ et $c \neq 0$ alors $a \div c = b \div c$

ex: $5x + 3 = -3x + 5$

$$5x + 3 + 3x = -3x + 5 + 3x \quad (1)$$

$$8x + 3 = 5$$

$$8x + 3 - 3 = 5 - 3 \quad (2)$$

$$8x = 2$$

$$8x \div 8 = 2 \div 8 \quad (4)$$

$$x = 0,25$$

Vérification: $5 \times 0,25 + 3 = 1,25 + 3 = 4,25$ et $-3 \times 0,25 + 5 = -0,75 + 5 = 4,25$

2) Produit nul:

Règle: Un produit est nul si l'un des facteurs est nul.

Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions de chacune des équations

$$ax+b=0 \quad \text{et} \quad cx+d=0.$$

Ex : $(2x-7)(-8x-9)=0$

on résout l'équation $2x-7=0$ et l'équation $-8x-9=0$

$$2x=7$$

$$-8x=9$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{-9}{8}$$

Les solutions de l'équation sont $\frac{7}{2}$ et $\frac{-9}{8}$

3) Situations problème:

Quand on doit répondre aux questions d'un problème, la démarche est:

choix de l'inconnue (en général on la trouve en lisant la question);

mise en équation en lisant attentivement le texte;

interprétation de la solution;

phrase de fin pour répondre à la question du problème.

4) Situation où il y a des puissances:

Quand il y a des puissances, en général des carrés, on met «tout égal 0» et on factorise.

Inéquations

a, b, c, x, y, z et t sont des nombres relatifs.

1) Rappels:

$3 + 2 \times 5 \geq 12$ est une inégalité ;

$3 + 2 \times x \geq 12$ est une inéquation dont x est l'inconnue.

Résoudre une inéquation c'est trouver l'ensemble des valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inéquation devient une inégalité. Les valeurs de l'inconnue qui conviennent forment l'ensemble solution de l'inéquation.

$x > 2$ est représenté graphiquement par : 

$x \geq 2$ est représenté graphiquement 
par :

2) Règles pour les inéquations:

Règle 1: On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation si on ajoute ou soustrait la même quantité aux deux membres de l'inéquation.

$$\begin{array}{ll} ax + b \geq c & ax - b \geq c \\ ax + b - b \geq c - b & ax - b + b \geq c + b \\ ax \geq c - b & ax \geq c + b \end{array}$$

Règle 2: On peut multiplier les deux membres d'une inéquation par un même nombre positif non nul sans changer le sens de l'inéquation. On ne change pas l'ensemble des solutions.

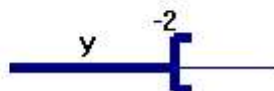
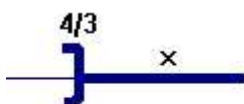
$$\begin{array}{ll} c \neq 0 ; c > 0 & ax > b \text{ alors } cax > bc \\ c \neq 0 ; c > 0 & ax < b \text{ alors } cax < bc \end{array}$$

Règle 3: On peut multiplier les deux membres d'une inéquation par un même nombre négatif non nul à condition de changer le sens de l'inéquation. On ne change pas l'ensemble solution.

$$\begin{array}{ll} c \neq 0 ; c < 0 & ax > b \text{ alors } cax < bc \\ c \neq 0 ; c < 0 & ax < b \text{ alors } cax > bc \end{array}$$

3) Exemples :

$5x - 3 > 2x + 1$	$5y - 3 > 7y + 1$	$4z + 5 \geq 6z - 1$	$4t + 5 \geq 2t - 3$
$5x - 2x > 1 + 3$	$5y - 7y > 1 + 3$	$4z - 6z \geq -1 - 5$	$4t - 2t \geq -3 - 5$
$3x > 4$	$-2y > 4$	$-2z \geq -6$	$2t \geq -8$
$x > \frac{4}{3}$	$y < \frac{4}{-2}$	$z \leq \frac{-6}{-2}$	$t \geq \frac{-8}{2}$
	$y < -2$	$z \leq 3$	$t \geq -4$



Fonctions linéaires et affines

a , b , x et y sont des nombres relatifs.

1) Rappels sur la proportionnalité , fonctions linéaires :

Voici un tableau de proportionnalité :

x	2	3	5	1,5	-2	-4	0	1
y	7	10,5	17,5	5,25	-7	-14	0	3,5

Les nombres de la seconde ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par un même nombre appelé coefficient : ici 3,5.

Si on désigne par x un nombre de la première ligne et par y un nombre de la seconde ligne correspondant on a $y=3,5x$

On dit que l'on passe de x à y par la fonction linéaire de coefficient 3,5.

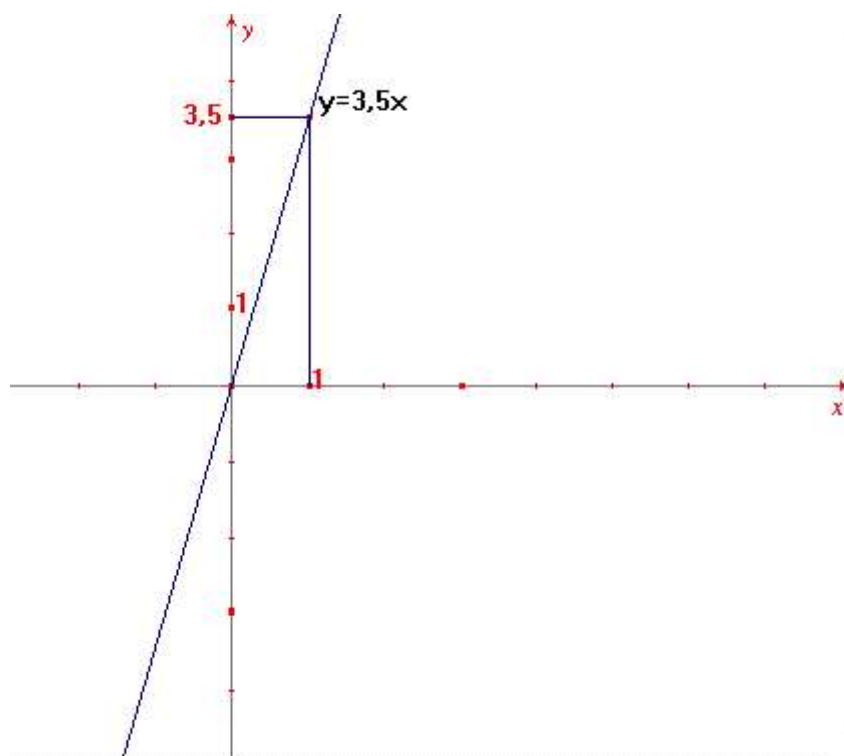
Cette fonction se note $x \mapsto 3,5x$

Si on appelle f cette fonction linéaire, au nombre 3 on associe la valeur 10,5 ; on dit que 3 a pour image 10,5 et on écrit $f(3)=10,5$.

De même $f(-2)=-7$; l'image de -2 est -7.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

On dit que la droite D a pour équation $y=3,5x$; on dit que 3,5 est le coefficient directeur de la droite D.



On remarque que le coefficient directeur est $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

exemple: $\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{10,5-(-7)}{3+2} = \frac{10,5+7}{5} = \frac{17,5}{5} = 3,5$

2) Fonctions affines:

La fonction f qui à x associe $-2x+3$ se note $f : x \mapsto -2x+3$.

On dit que f est une fonction affine.

On a le tableau suivant :

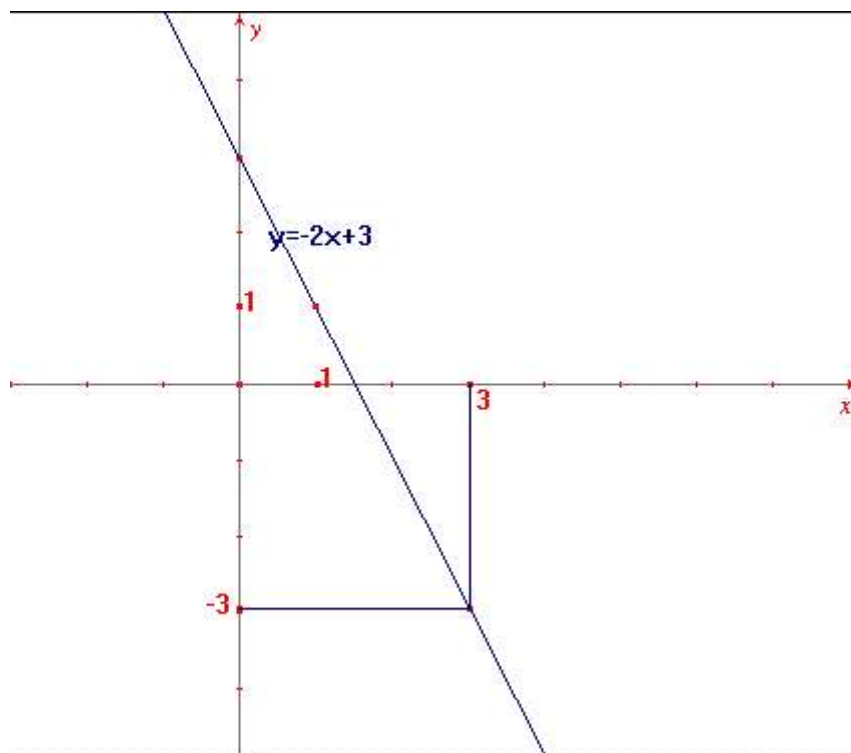
x	1	0	4	-1	-2	3
y	1	3	-5	5	7	-3

L'image de 4 se note $f(4)$ et on a $f(4) = -2 \times 4 + 3 = -5$

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite D .

Cette droite D a pour équation $y = -2x + 3$.

On dit que -2 est le coefficient directeur de la droite D ; et que $+3$ est son ordonnée à l'origine car $f(0) = +3$.



Remarques :

Le coefficient directeur est $\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$

$$\text{exemple : } \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{-3 - 7}{3 + 2} = \frac{-10}{5} = -2$$

Une fonction linéaire est une fonction affine particulière, son ordonnée à l'origine est nulle.

Une fonction affine dont le coefficient directeur est nul a une représentation parallèle à l'axe des abscisses.

3) Exemples:

$$f : x \mapsto -x$$

$$f(x) = -x$$

Fonction linéaire

f est représentée par D_1
d'équation $y = -x$

coefficient directeur: -1

$$(0;0) \in D_1$$

$$(1,-1) \in D_1$$

$$g : x \mapsto 2x+1$$

$$g(x) = 2x+1$$

Fonction affine

g est représentée par D_2
d'équation $y = 2x+1$

coefficient directeur: 2

$$(0;1) \in D_2$$

$$(1;3) \in D_2$$

$$h : x \mapsto -2x+1$$

$$h(x) = -2x+1$$

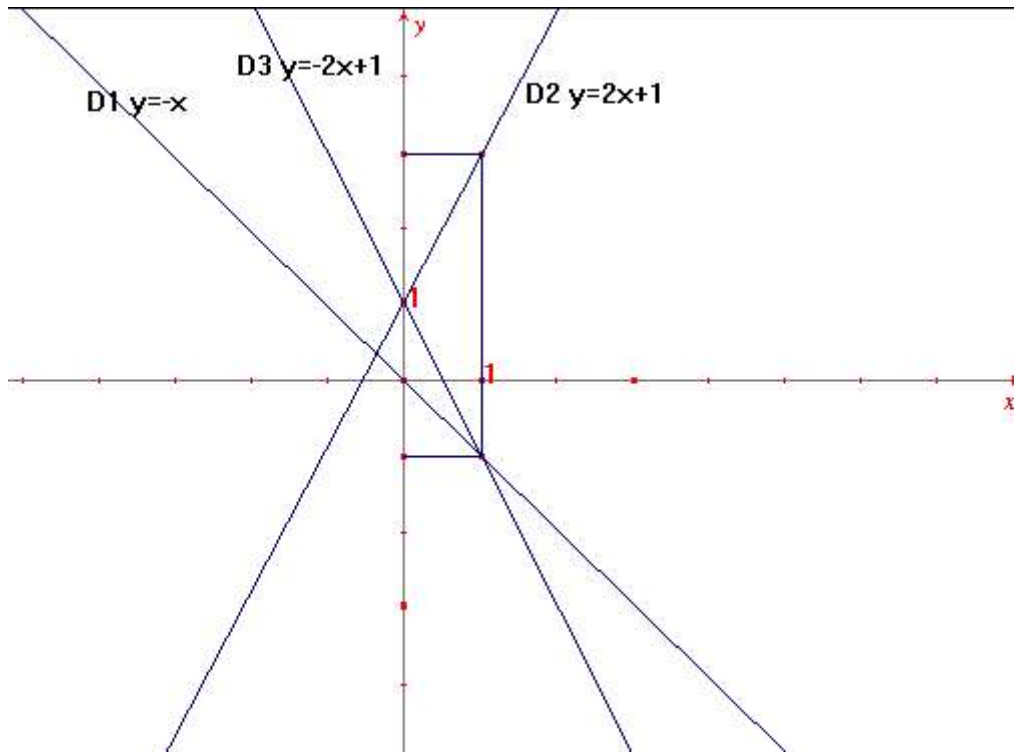
Fonction affine

h est représentée par D_3
d'équation $y = -2x+1$

coefficient directeur: -2

$$(0;1) \in D_3$$

$$(1,-1) \in D_3$$



4) Formules :

Une fonction linéaire est représentée par :

$$f : x \mapsto ax \quad f(x) = ax \quad y = ax$$

a nombre fixe

Une fonction affine est représentée par :

$$f : x \mapsto ax + b \quad f(x) = ax + b \quad y = ax + b$$

a et b nombres fixes

Si $a > 0$ la fonction est croissante.

Si $a < 0$ la fonction est décroissante.

Systèmes

x et y sont des nombres relatifs.

1) Définition:

Un Système d'équations à deux inconnues est la donnée de deux équations, comportant deux inconnues (en général x et y) qui doivent être vérifiées en même temps.

Résoudre un système c'est trouver tous les couples $(x;y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

On donne la solution sous la forme $S=\{(x;y)\}$

2) Méthode par comparaison:

Cette méthode est utilisée quand on a les deux équations sous la forme :

$$\begin{cases} x = -- \\ x = -- \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -- \\ y = -- \end{cases}$$

On écrit alors l'égalité des deux quantités et on est amené à résoudre une équation à une inconnue. Pour calculer la deuxième inconnue on remplace l'inconnue déjà calculée par sa valeur dans une des équations du départ.

Exemple:

$$\begin{cases} x = 5y + 3 & (1) \\ x = 3y + 7 & (2) \end{cases}$$

$$(1)=(2) \quad 5y+3=3y+7 \quad \text{donc} \quad 5y-3y=7-3 \quad \text{et} \quad 2y=4 \quad \text{donc} \quad y=2$$

$$(1) \quad x=5 \times 2 + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$S=\{(13;2)\}$$

3) Méthode par substitution:

Cette méthode est utilisée quand on a l'une des équations sous la forme :

$$\begin{cases} x = -- \\ ---- \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -- \\ ---- \end{cases}$$

On remplace l'inconnue isolée (x si c'est $x=...$ ou y si c'est $y=...$) dans l'autre équation par sa valeur correspondante.

On est alors amené à résoudre une équation à une inconnue. Pour trouver la deuxième on remplace l'inconnue déjà calculée par sa valeur dans l'équation du départ.

Exemple:

$$\begin{cases} y = 3x - 5 & (1) \\ 2x + 4y = 22 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \text{ devient } 2x + 4(3x - 5) = 22$$

$$2x + 12x - 20 = 22 \quad \text{et} \quad 14x = 22 + 20 = 42$$

$$x = \frac{42}{14} = 3$$

$$(1) \quad y = 3 \times 3 - 5 = 9 - 5 = 4$$

$$S = \{(3;4)\}$$

4) Méthode par combinaison linéaire (ou par addition):

Cette méthode est une méthode très générale.

En multipliant toute la première ligne par un nombre puis toute la seconde ligne par un autre nombre on fait apparaître devant x (ou y) deux nombres opposés. En additionnant les deux lignes on fait disparaître une inconnue et on est amené à résoudre une équation à une inconnue.

On procède de même pour la deuxième inconnue.

Exemple:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y = 12 \quad (1) \\ 3x + 4y = -5 \quad (2) \end{array} \right. \\ \begin{array}{rcl} \frac{(1) \times 3}{(2) \times (-2)} \left\{ \begin{array}{l} 6x - 15y = 36 \\ -6x - 8y = 10 \end{array} \right. & \frac{(1) \times 4}{(2) \times 5} \left\{ \begin{array}{l} 8x - 20y = 48 \\ 15x + 20y = -25 \end{array} \right. \\ \hline 0x - 23y = 46 & \hline 23x + 0y = 23 \\ -23y = 46 & 23x = 23 \\ y = \frac{46}{-23} = -2 & x = \frac{23}{23} = 1 \end{array} \\ S = \{(1; -2)\} \end{array}$$

5) Problème conduisant à un système:

En lisant attentivement le texte on choisit les inconnues (généralement leur choix réside dans la question);

On écrit le système d'équations (en faisant attention à bien respecter le texte);

On résout le système (par la méthode que l'on préfère);

On donne une phrase de fin pour répondre à la question.

Exemple :

Chez le pépiniériste, on propose un lot de 16 arbres fruitiers composé de pêchers et de poiriers, à 187,2 €. Les pêchers valent 10,6 € pièce et les poiriers 15 € pièce.

Calculer le nombre d'arbres de chaque sorte dans un lot.

Soit x le nombre de pêchers et y le nombre de poiriers.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 16 \quad (\text{il y a 16 arbres}) \\ 10,6x + 15y = 187,2 \quad (\text{le lot coûte 187,2 €}) \end{array} \right.$$

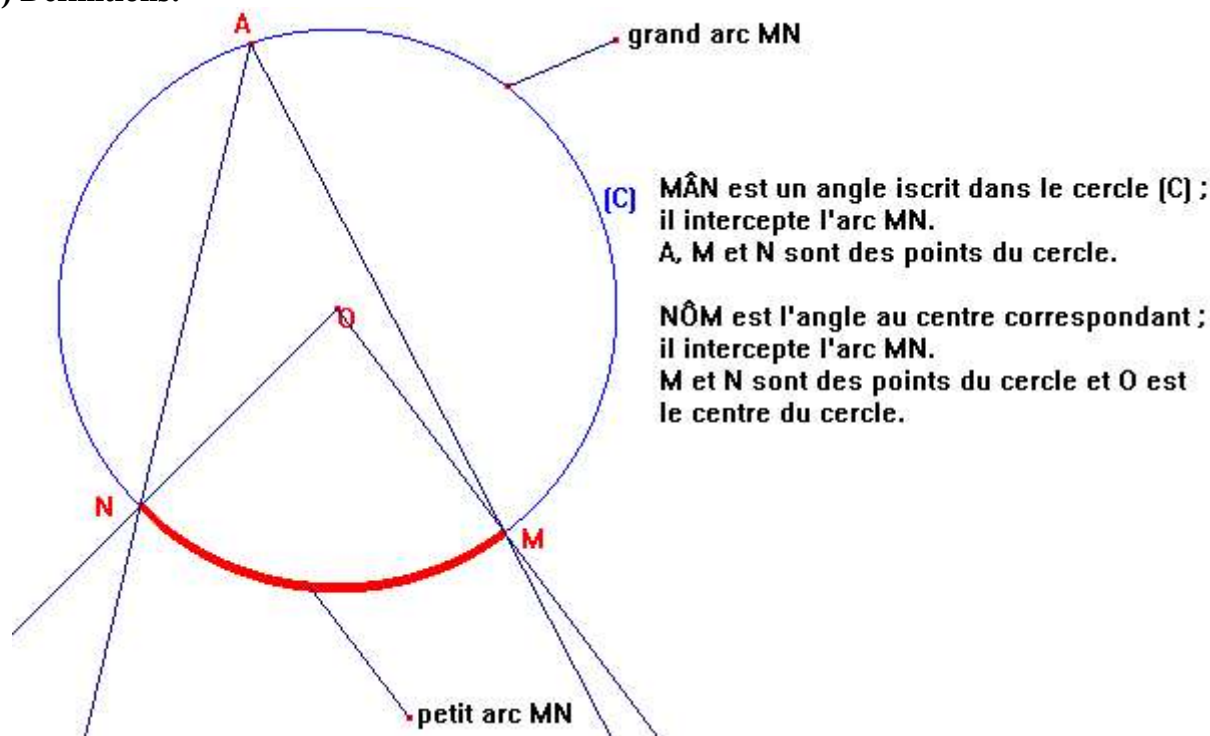
On résout le système par la méthode que l'on veut (ici on peut utiliser la substitution ou la combinaison linéaire).

Le système a pour solution $x=12$ et $y=4$.

Le lot contient 12 pêchers et 4 poiriers.

Angles inscrits

1) Définitions:

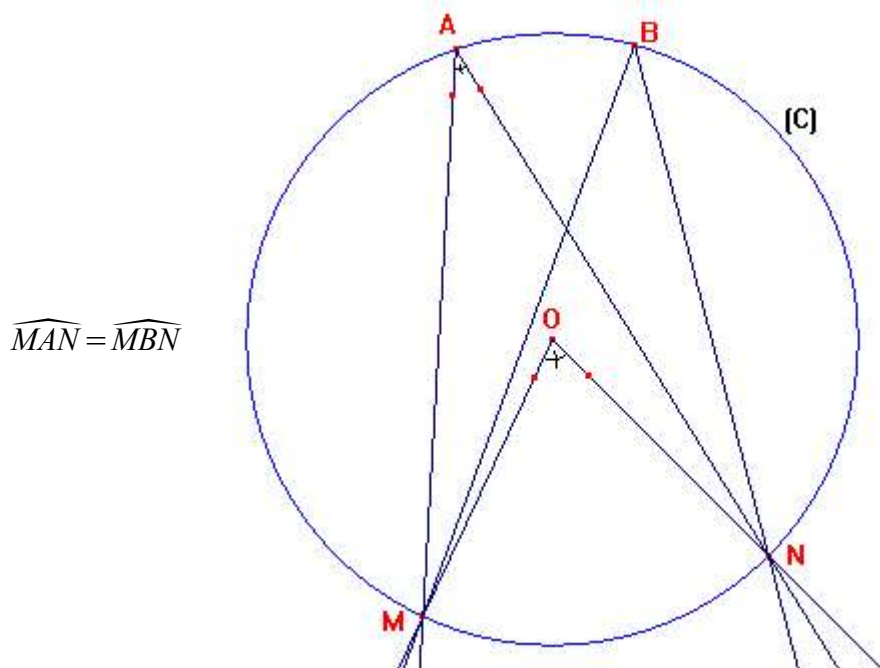


2) Propriétés:

La mesure de l'angle inscrit est la moitié de celle de l'angle au centre correspondant qui intercepte le même arc.

$$\widehat{MAN} = \frac{1}{2} \widehat{MON} \quad \text{ou} \quad \widehat{MON} = 2 \times \widehat{MAN}$$

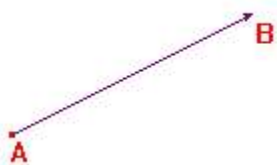
Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure.



Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient un angle droit.

Translations. Vecteurs. Rotations.**1) Définitions :**

Deux points A et B, pris dans cet ordre, représentent un vecteur d'origine A et d'extrémité B. On le note $\overrightarrow{AB}$.



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est différent du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

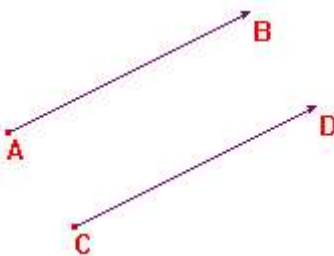
La transformation de A en B est une translation. On dit que B est l'image de A par la translation. On appelle cette translation translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.

$\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

2) Egalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs sont égaux s'ils définissent la même translation.

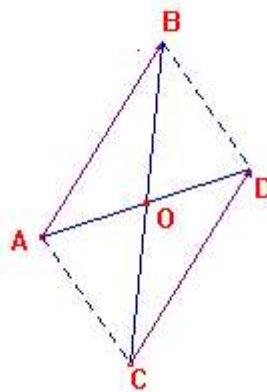
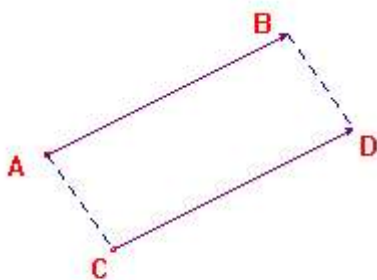


Si D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ alors D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Vecteurs et parallélogrammes :

Soit ABDC un quadrilatère (attention à l'ordre des points !).



Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.

Si ABDC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarques :

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ alors } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

Pour démontrer l'égalité de deux vecteurs on peut démontrer que les points forment un parallélogramme.

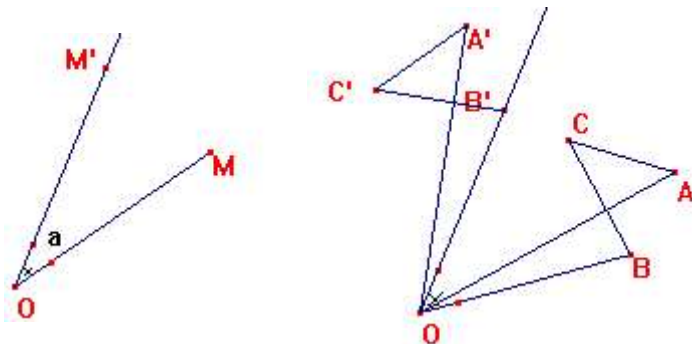
$$\text{Si } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ alors } [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont même milieu.}$$

$$\text{Si } [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont même milieu alors } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

4) Rotations :

Une rotation de centre O et d'angle α est une transformation du plan qui à un point M associe un point M' tel que :

OM=OM' et $\widehat{MOM'} = \alpha$. Le sens de la rotation est indiqué par une flèche.



Une rotation transforme :

Un segment en un segment de même longueur ; ($AC=A'C'$)

Une droite en une droite ;

Une demi-droite en une demi-droite ;

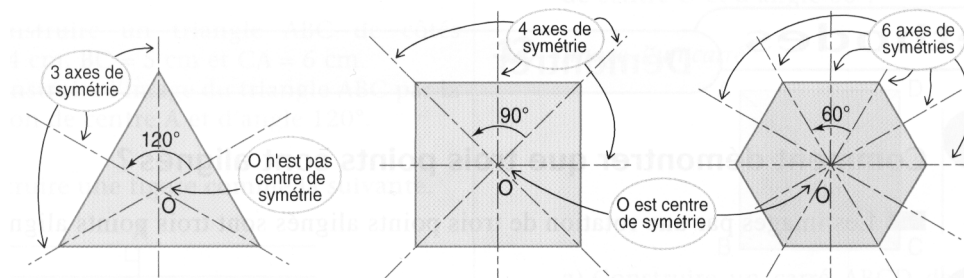
Un angle en un angle de même mesure ; ($\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$)

Un cercle en un cercle de même rayon ;

Une surface en une surface de même aire . ($\text{Aire}(ACB)=\text{Aire}(A'C'B')$)

5) Polygones réguliers :

Un polygone est régulier quand tous ses côtés ont même longueur et tous ses angles même mesure.



Triangle équilatéral

Une rotation de centre O et d'angle 120° transforme ce triangle en lui-même.

Carré

Une rotation de centre O et d'angle 90° transforme le carré en lui-même.

Hexagone

Une rotation de centre O et d'angle 60° transforme l'hexagone en lui-même.

Un polygone régulier est inscriptible dans un cercle dont le centre est le centre de symétrie.

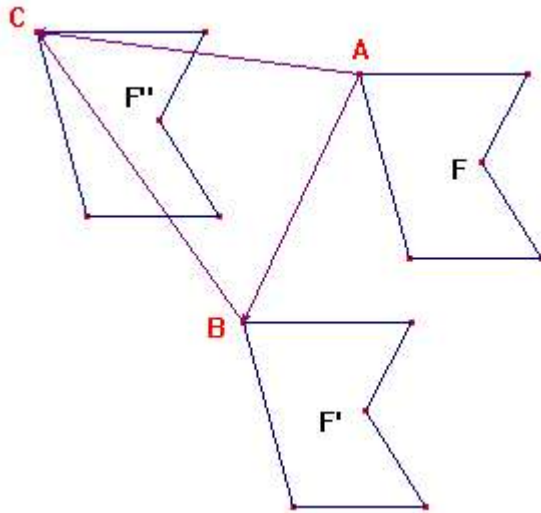
Vecteurs et coordonnées.**1) Composition de deux translations :**

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, la figure F se transforme en F'.

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la figure F' se transforme en F''.

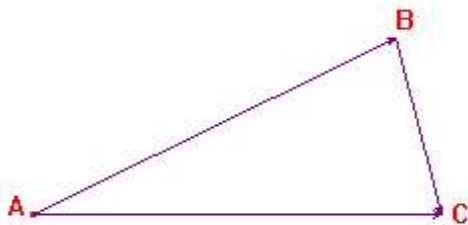
Alors la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ transforme directement F en F''.

Pour passer de F à F'' on dit que l'on a fait la composition des translations de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

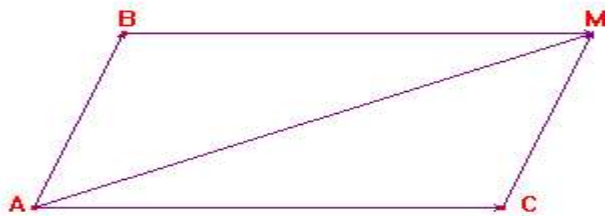
**2) Somme de deux vecteurs : méthode du triangle :**

Soit A, B et C trois points quelconques, on dit que la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Cette règle est la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

**3) Somme de deux vecteurs : méthode du parallélogramme :**

ABMC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$

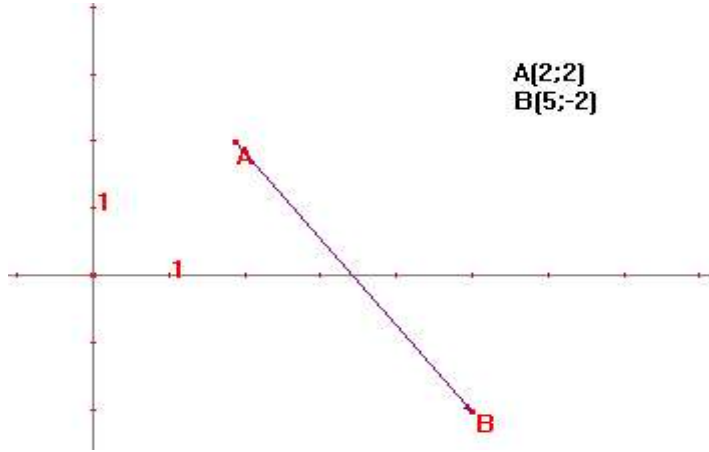


4) Coordonnées d'un vecteur , distance :

Dans un repère, si les points A et B ont pour coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Attention à l'ordre : extrémité moins origine !

La distance de A à B, notée $d(A; B)$, se calcule par $AB = d(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



$$\overrightarrow{AB} (5-2; -2-2)$$

$$\overrightarrow{AB} (3; -4)$$

$$AB = d(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = d(A; B) = \sqrt{(5-2)^2 + (-2-2)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Si deux vecteurs sont égaux, ils ont même coordonnées.

Si $\vec{u} = \vec{v}$ avec $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ alors $x = x'$ et $y = y'$

5) Coordonnées du milieu d'un segment :

Dans un repère, si les points A et B ont pour coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors le point I, milieu de [AB] a pour coordonnées $I(x_I; y_I)$

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

exemple : A(2,2) et B(5;-2) alors le milieu M de [AB] a pour coordonnées

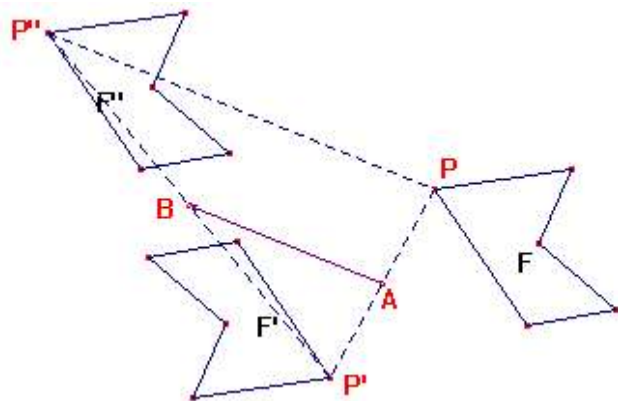
$$x = \frac{2+5}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2+(-2)}{2} ; \quad M\left(\frac{7}{2}; \frac{0}{2}\right) ; \quad M\left(\frac{7}{2}; 0\right)$$

6) Composition de deux symétries centrales :

La figure F a pour symétrique F' par rapport à A.

La figure F' a pour symétrique F'' par rapport à B.

Alors la transformation directe de F en F'' est la translation de vecteur $2 \overrightarrow{AB}$.



A est le milieu de [PP']

B est le milieu de [P'P'']

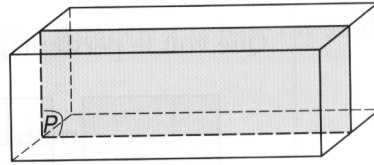
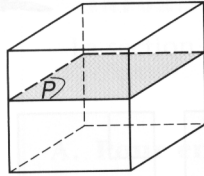
$PP'' = 2AB$ (propriété de la droite des milieux)

$$\overrightarrow{PP''} = 2 \overrightarrow{AB}$$

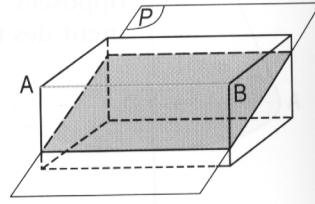
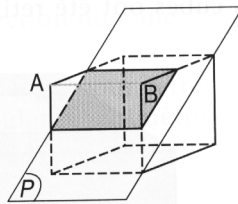
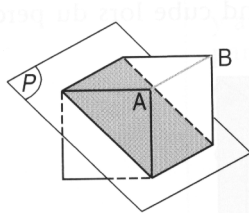
Géométrie dans l'espace et sphère.

1) Cube, parallélépipède :

La section d'un cube ou d'un parallélépipède par un plan parallèle à une face est un carré ou un rectangle ayant les mêmes dimensions que cette face.



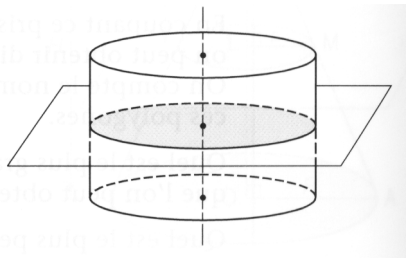
La section d'un cube ou d'un parallélépipède par un plan parallèle à une arête est un rectangle.



2) Cylindre:

La section d'un cylindre par un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre est un disque de même rayon que la base. (fig 1)

fig 1



La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe du cylindre est un rectangle. (fig 2)

Dans le cas particulier où le plan contient l'axe du cylindre, la section est un rectangle de dimensions h et $2R$. (fig 3)

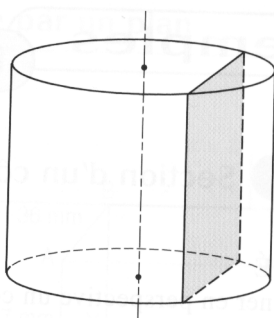


fig 2

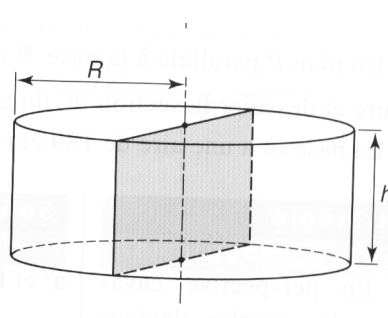
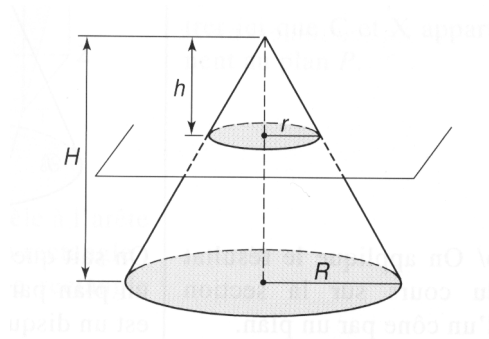


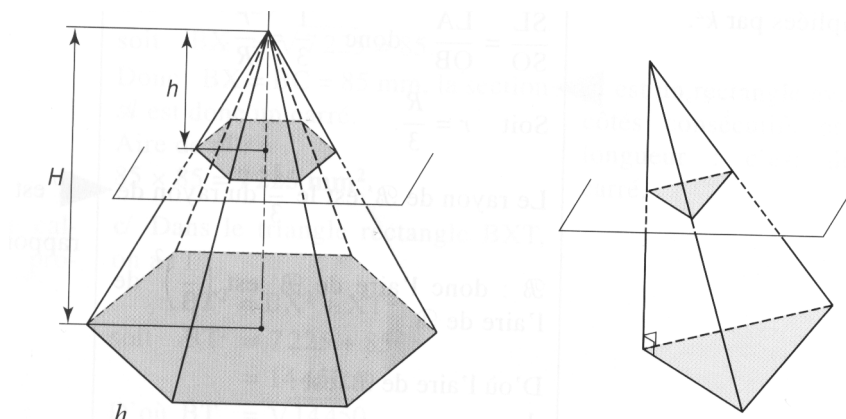
fig 3

3) Cône, pyramide :

La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un disque qui est une réduction du disque de base. Le rapport de réduction est $\frac{h}{H}$.



La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone qui est une réduction du polygone de la base. Le rapport de réduction est $\frac{h}{H}$.

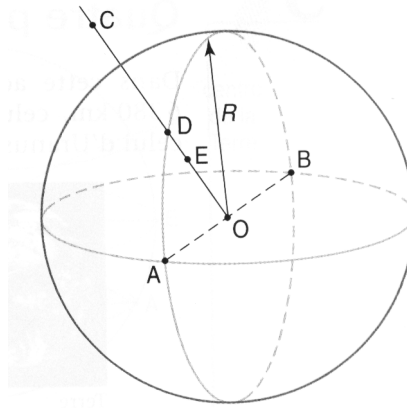


4) Sphère :

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à O est égale à R .

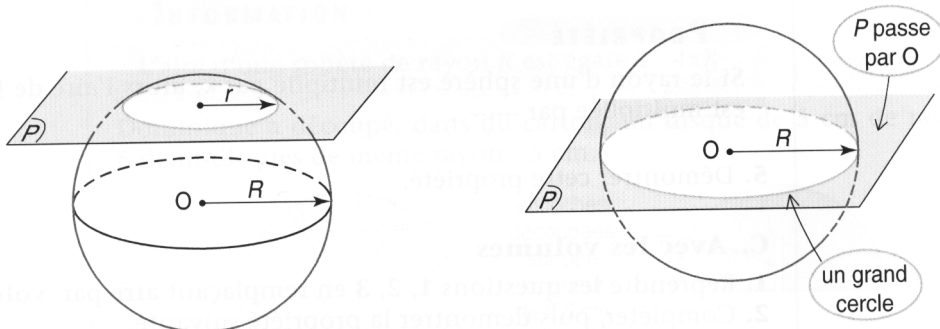
La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à O est inférieure ou égale à R .

Deux points d'une sphère sont diamétralement opposés si le centre de la sphère est le milieu du segment joignant ces deux points.



La section d'une sphère par un plan est un cercle.

Quand ce plan passe par le centre de la sphère on dit que la section est un grand cercle.



5) Formulaire:

L'aire d'une sphère de rayon R est $A = 4\pi R^2$

Le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Le volume d'une pyramide de hauteur h est $V = \frac{1}{3}(\text{Aire de la base}) \times h$

Le volume d'un cône de rayon de base R et de hauteur h est $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \times h$

Le volume d'un cylindre de rayon de base R et de hauteur h est $V = \pi R^2 h$