Quatrième

Opérations sur les nombres relatifs

1) Addition, soustraction:

Règle 1: Pour additionner des nombres de même signe on garde le signe et on ajoute les distances à zéro.

ex: (+5) + (+8) = +13
(-5) + (-8) = -13

Règle 2: Pour additionner des nombres de signes différents, on prend le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro et on fait "plus grande distance à zéro moins plus petite".

ex: (+5) + (-8) = -3
(-5) + (+8) = +3

remarque: la somme de deux nombres opposés est égale à 0.
(+5)+(-5)=0 (-8)+(+8)=0

Règle 3: Pour soustraire, on ajoute l'opposé.

ex: (+5) - (+8) = (+5) + (-8) = -3
(+5) - (-8) = (+5) + (+8) = +13
(-5) - (+8) = (-5) + (-8) = -13
(-5) - (-8) = (-5) + (+8) =+3

2) Multiplication, division de nombres relatifs:

Règle 1: Le produit de deux nombres de même signe est positif.

ex: $(+3) \times (+7) = +21$
$(-3) \times (-7) = +21$

Règle 2: Le produit de deux nombres de signes différents est un négatif.

ex: $(+3) \times (-7) = -21$
$(-3) \times (+7) = -21$

Règle 3: Les règles des signes pour la division sont les mêmes que pour la multiplication.

Cas particuliers: Pour tout nombre relatif a, $0 \times a = a \times 0 = 0$.
On ne peut pas faire de division par 0.

X	+	-
+	+	-
-	-	+

3) Résoudre des équations:

Propriétés: 1) Si $a = b$ alors $a + c = b + c$
2) Si $a = b$ alors $a - c = b - c$
3) Si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$
4) Si $a = b$ et $c \neq 0$ alors $a \div c = b \div c$

ex: $5x + 3 = - 3x + 5$
$5x + 3 + 3x = -3x + 5 + 3x$ (1)
$8x + 3 = 5$
$8x + 3 - 3 = 5 - 3$ (2)
$8x = 2$
$8x \div 8 = 2 \div 8$ (4)
$x = 0{,}25$

Vérification: $5 \times 0{,}25 + 3 = 1{,}25 + 3 = 4{,}25$ et $-3 \times 0{,}25 + 5 = -0{,}75 + 5 = 4{,}25$

Ecritures fractionnaires

a; b; c; d; k désignent des nombres relatifs.

1) Egalité de deux quotients:

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas quand on multiplie (ou quand on divise) ces deux nombres par un même nombre relatif différent de zéro.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}\ ,\quad \frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}\ ,\quad b\neq 0\ \ ,\ \ c\neq 0$$

$$ex:\ \frac{2}{-0{,}3}=\frac{2\times(-10)}{-0{,}3\times(-10)}=\frac{-20}{3}\ ;\qquad -\frac{18}{12}=-\frac{18\div 6}{12\div 6}=-\frac{3}{2}$$

2) Addition, soustraction:

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur.

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}=\frac{a+b}{k}\quad ;\quad \frac{a}{k}-\frac{b}{k}=\frac{a-b}{k}\quad ;\quad k\neq 0$$

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on les réduit d'abord au même dénominateur.

$$ex:\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{-2}{6}+\frac{15}{6}=\frac{-2+15}{6}=\frac{13}{6}\quad ;\quad 2-\frac{1}{3}=\frac{2}{1}-\frac{1}{3}=\frac{6}{3}-\frac{1}{3}=\frac{6-1}{3}=\frac{5}{3}$$

3) Multiplication:

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}\ ;\ b\neq 0\ ;\ d\neq 0\ ,\ en\,particulier\qquad a\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{d}$$

$$ex:\ \frac{-5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{-5\times 3}{7\times 4}=\frac{-15}{28}=-\frac{15}{28}\quad ;\quad -2\times\frac{-5}{7}=\frac{-2\times(-5)}{7}=\frac{10}{7}$$

4) Inverse d'un nombre:

$$L'inverse\ de\ \frac{c}{d}\ est\ \frac{d}{c}\ \ (avec\ \ c\neq 0\ \ et\ \ d\neq 0\ )$$

$$L'inverse\ de\ x\ est\ \frac{1}{x}\ aussi\ noté\ x^{-1}\qquad (avec\ x\neq 0\ )$$

$$On\ a\ \ x\times\frac{1}{x}=x\times x^{-1}=1\qquad (avec\ \ x\neq 0\ )$$

5) Division:

Pour diviser par un nombre, différent de zéro, on multiplie par son inverse.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}\quad \textit{ou encore}\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}\quad ;\ b\neq 0\ ;\ c\neq 0\ ;\ d\neq 0$$

$$\textit{ex :}\quad \frac{-5}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{-5}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{-20}{21}\quad ;\quad \frac{3}{4}\div 2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{\frac{-5}{7}}{\frac{3}{4}}=\frac{-5}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{-20}{21}\quad ;\quad \frac{\frac{3}{4}}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

6) Produit en croix:

Si deux quotients sont égaux, leurs produits en croix sont égaux aussi.:

$$\textit{Si}\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \textit{alors}\ ad=bc\quad (\,b\neq 0\ ;\ d\neq 0\,)$$

$$\textit{ex :}\quad \frac{3}{4}=\frac{15}{20}\quad \textit{alors}\quad 3\times 20=4\times 15$$

$$\frac{5}{6}=\frac{x}{8}\quad \textit{alors}\quad 6\text{x}=5\times 8=40\quad \textit{et}\quad x=40\div 6=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$$

Les puissances d'exposant entier relatif

1) Les puissances de dix:

n désigne un nombre entier positif différent de zéro. (n>0).

Définition : 10^n désigne le produit de n facteurs égaux à 10

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times ... \times 10}_{\text{n facteurs}} = 1\,\underbrace{0...0}_{\text{n zéros}} \qquad (\text{avec } n \geq 2)$$

10^n se lit 10 puissance n

Par convention : $10^0 = 1$ et $10^1 = 10$

Définition : 10^{-n} désigne l'inverse de 10^n

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1\,\underbrace{0...0}_{\text{n zéros}}} = \overbrace{0{,}0...}^{\text{n zéros}}1 = 0{,}\underbrace{0...1}_{\text{n chiffres}}$$

ex : $10^6 = 1\,000\,000$ $\qquad 10^{-6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$

10^6 représente un million et 10^{-6} représente un millionième

2) Règle de calculs sur les puissances de dix:

n et m désignent des nombres entiers relatifs.

Produit : $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$ *ex :* $10^6 \times 10^4 = 10^{6+4} = 10^{10}$

Inverse : $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ *ex :* $\frac{1}{10^{-6}} = 10^{-(-6)} = 10^6$

Quotient : $\frac{10^p}{10^q} = 10^{p-q}$ *ex :* $\frac{10^2}{10^{-3}} = 10^{2-(-3)} = 10^5$

Puissance de puissance : $(10^n)^m = 10^{n \times m}$ *ex :* $(10^{-3})^2 = 10^{-3\times 2} = 10^{-6}$

3) Notation scientifique d'un nombre:

Un nombre décimal peut s'écrire de différentes façons sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal et p un entier relatif.

ex: 3 256,41 =3 25 641×10^{-2} = 0,325 641×10^4 = 3,25 641×10^3

L'écriture scientifique d'un nombres est la seule écriture $a \times 10^p$ pour laquelle le nombre a est écrit avec un seul chiffre avant la virgule, autre que zéro.

2,5 698×10^3 est l'écriture scientifique de 2 569,8.

4) Les carrés, la touche $\sqrt{}$:

$a^2 = a \times a$

$(5)^2 = 5 \times 5 = 25$ $\qquad (-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$

Exemple: un carré a une aire de 8cm².
la longueur x en cm du côté de ce carré vérifie l'égalité : $x^2 = 8$.
la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice permet de trouver une valeur approchée de x ; $x \approx 2{,}828$.
le nombre positif x est appelé racine carrée de 8 et s'écrit $\sqrt{8}$.

5) Puissances entières d'un nombre relatif:

a désigne un nombre relatif et *n* un entier positif différent de zéro .

Définition : $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n\ facteurs\ a}$ *pour* $n \geqslant 2$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ *avec* $a \neq 0$

Par convention : $a^0 = 1$; $a^1 = a$ *(avec* $a \neq 0$ *)*

Cas particuliers : $1^n = 1$; $0^n = 0$; $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

Règles de calculs sur les puissances entières: exemples :

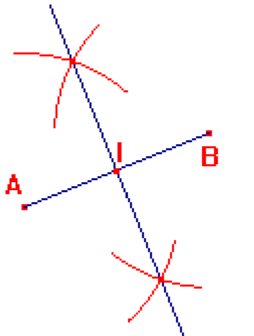
$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$ $\qquad \dfrac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$ $\quad (avec\ a \neq 0)$ $\qquad (ab)^2 = ab \times ab = a^2 \times b^2$

Géométrie: bases.

1) Notation:

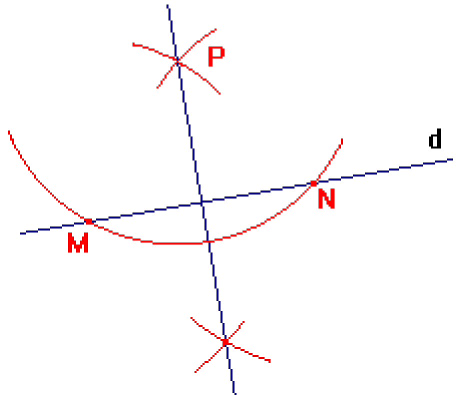
(AB): droite passant par A et B.
[AB]: segment d'extrémités A et B.
AB: longueur du segment [AB].
[AB): demi-droite d'origine A.

2) Constructions:



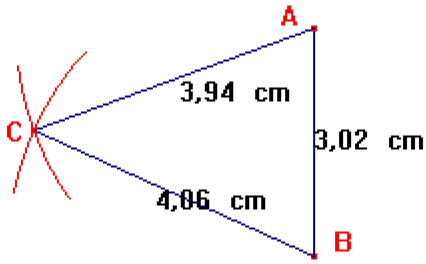
Tracer des arcs de cercle de centres A et B et de même rayon

Médiatrice d'un segment
et Milieu d'un segment .



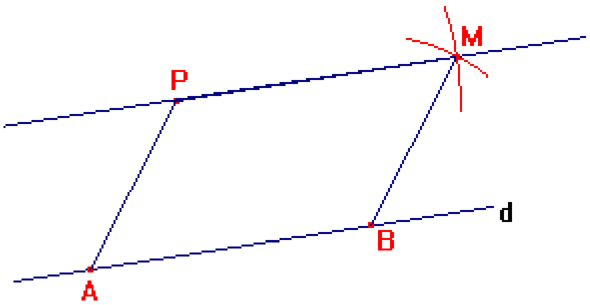
Prendre deux points sur d ; M et N ; tracer les arcs de cercle de centres M et N et de rayon jusqu'à P.

Perpendiculaire à une droite .



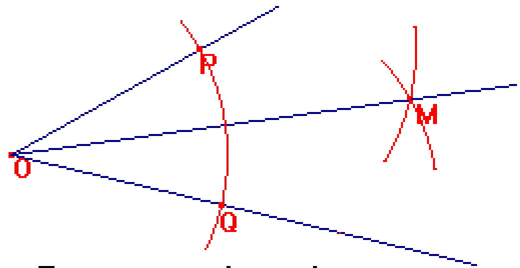
Tracer le côté AB=3,02 ; tracer l'arc de cercle de centre A et de rayon AC=3,94 puis l'arc de cercle de rayon BC=4,86

Triangle.



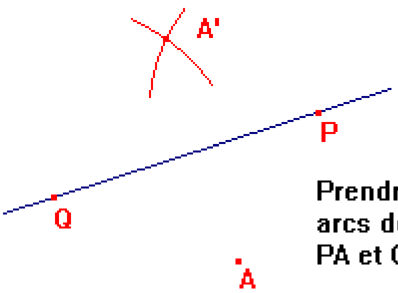
Tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon AP ; tracer l'arc de cercle de centre P et de rayon AB .

Parallèle à une droite et construction d'un parallélogramme.



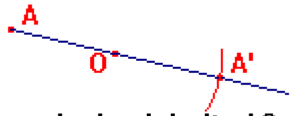
Tracer un arc de cercle coupant les côtés en P et Q ; tracer les arcs de cercle de centres P et Q sans changer d'écartement .

Bissectrice d'un angle .



Prendre deux points P et Q sur d ; tracer les arcs de cercle de centres P et Q et de rayons PA et QA .

Symétrie axiale .



Tracer la demi-droite AO ; tracer le cercle de centre O passant par A .

Symétrie centrale .

La droite des milieux

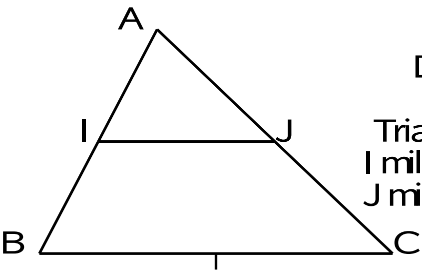
1) Rappels:

(AB): droite AB
[AB] : segment AB
AB: longueur du segment AB

2) Droite des milieux:

Première propriété des milieux: Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

La longueur du segment qui joint ces deux milieux est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.



Données:

Triangle ABC;
I milieu de [AB]
J milieu de [AC]

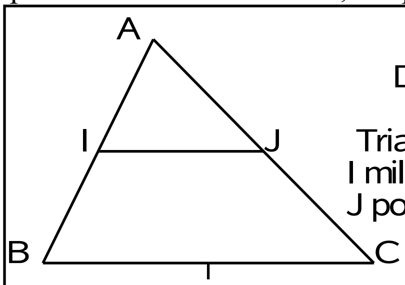
Première Propriété

Conclusion:

(IJ)//(BC)
et
IJ=(1/2)BC

3) Milieu et parallèle:

Seconde propriété des milieux: Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un second côté, coupe le troisième côté en son milieu.



Données:

Triangle ABC;
I milieu de [AB]
J point de [AC]
(IJ)//(BC)

Seconde Propriété

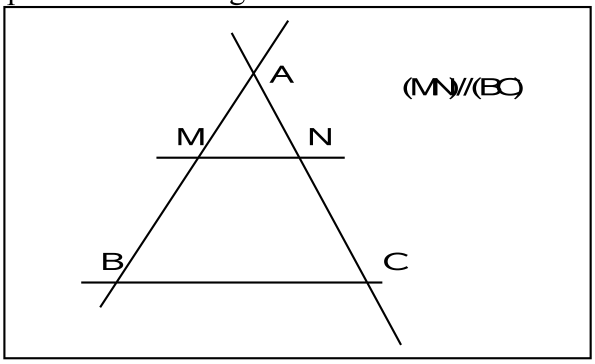
Conclusion:

J milieu de [AC]

La propriété de Thalés ou des trois rapports égaux

1) Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes:

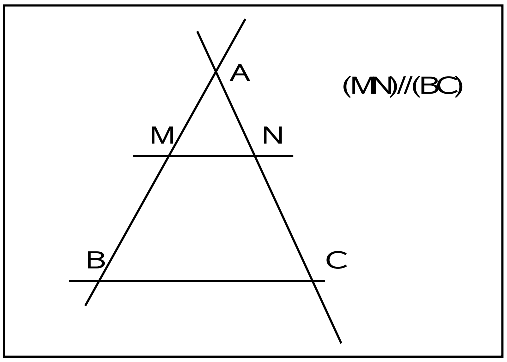
Propriété: Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors, les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés correspondants du triangle ABC.



Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité:

Longueurs des côtés de AMN	*AN*	*AM*	*MN*
Longueurs des côtés correspondants de ABC	AC	AB	BC

2) Egalité des trois rapports: la propriété de Thalés:

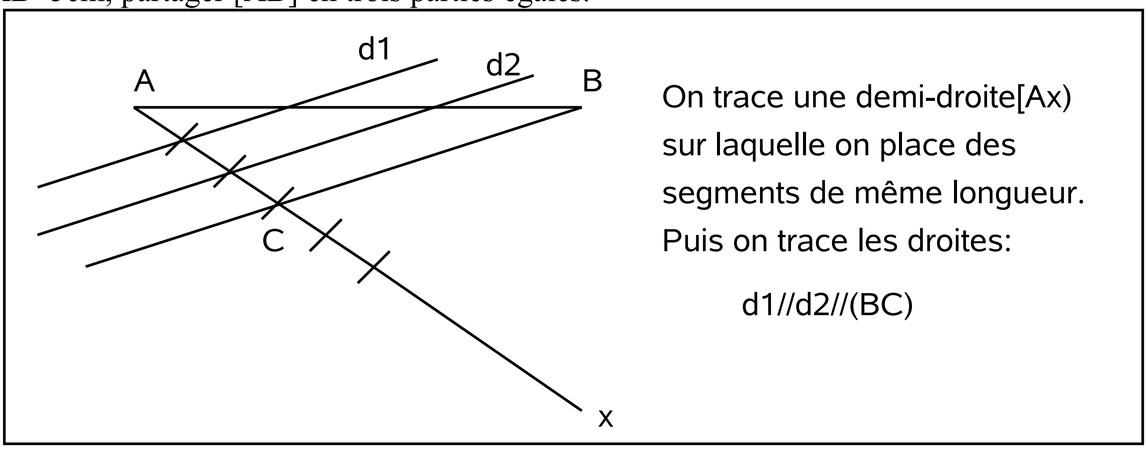


Propriété des "Trois Rapports Egaux": Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

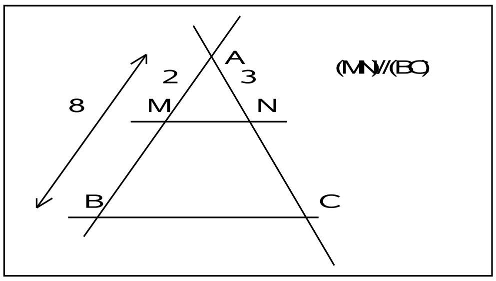
3) Partage de segment:

AB=5cm, partager [AB] en trois parties égales.



4) Exemples:

Enoncé 1: Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. AB=8; AM=2; AN=3.
Calculer NC.

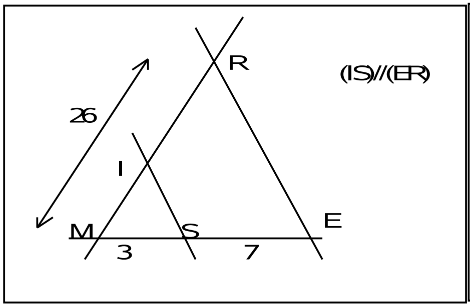


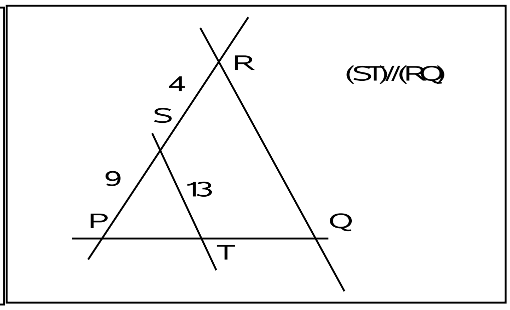
Solution:

Dans le triangle ABC, M est sur [AB], N est sur [AC] et (MN)//(BC). Donc les longueurs des côtés de AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés correspondants de ABC.

Or AB=8=4×2=4×AM donc AC=4×AN=4×3=12.

Donc NC=AC-AN=12-3=9. NC=9





Enoncé 2: Dans le triangle MER on a S point de [ME]; I point de [MR] ; les droites (SI) et (ER) parallèles; MR=26; MS=3 et SE=7. Calculer MI.

Solution:

Dans le triangle MER, S est sur [ME], I est sur [MR] et (IS)//(ER). Donc d'après la propriété des "trois rapports égaux":

$$\frac{MI}{MR}=\frac{MS}{ME}=\frac{IS}{RE} \quad \text{en particulier} \quad \frac{MI}{MR}=\frac{MS}{ME} \quad \text{et} \quad \frac{MI}{26}=\frac{3}{10}$$

Donc, en faisant le produit en croix : $10\times MI=3\times 26=78$

et $MI=\frac{78}{10}=7{,}8$ $\qquad MI=7{,}8$

Enoncé 3: Dans le triangle RPQ on a S sur [PR] et T sur [PQ]. On a aussi PS=9; SR=4 et ST=13. Les droites (RQ) et (ST) sont parallèles. Calculer RQ.

Solution:

Dans le triangle RPQ, S est sur [PR], T est sur [PQ], et (ST)//(RQ). Donc, d'après la propriété des "trois rapports égaux":

$$\frac{PS}{PR}=\frac{PT}{PQ}=\frac{ST}{RQ} \quad \text{en particulier} \quad \frac{PS}{PR}=\frac{ST}{RQ} \quad \text{donc} \quad \frac{3}{13}=\frac{13}{RQ} \quad \text{et} \quad 9\times RQ=13\times 13=169$$

et $RQ=\frac{169}{9}$.

(Remarque : la division de 169 par 9 ne tombe pas juste. L'énoncé ne demande pas de valeur approchée, il faut donc donner la valeur exacte de RQ, soit $\frac{169}{9}$)

Des expressions numériques

a,b,c,d, k et *x* désignent des nombres relatifs.

1) Suppression de parenthèses:

Règle : Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut supprimer des parenthèses précédées du signe + (ainsi que ce signe +), sans changer l'expression entre parenthèses.

ex: $a + (b + c) = a + b + c$ $\quad a + (-b + c) = a - b + c$ $\quad (a + b) - c = a + b - c$

Règle : Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut supprimer des parenthèses précédées du signe − (ainsi que ce signe −), en changeant les signes écrits dans l'expression entre parenthèses.

ex: $a - (b + c) = a - b - c$ $\quad a - (-b + c) = a + b - c$

2) Distributivité:

$$k(a + b) = ka + kb$$
$$k(a - b) = ka - kb$$

ex: $3(2x + 5) = 3\times2x + 3\times5$
$= 6x + 15$

$5(4 - 3x) = 5\times4 - 5\times3x$
$= 20 -15x$

3) Réduction d'une expression littérale:

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

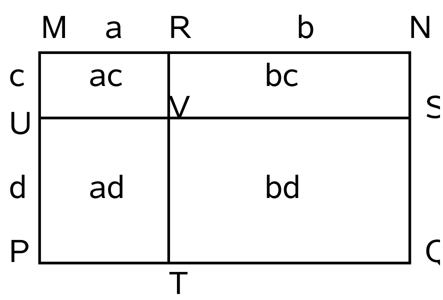
ex: réduction de $A=3x^2+x-(x^2+4x-1)$

$A=3x^2+x-x^2-4x+1$ (règle de suppression des parenthèses avec -)
$A=3x^2-x^2+x-4x+1$ (on met ensemble les x^2; les x)
$A=(3-1)x^2+(1-4)x+1$ (on utilise la distributivité)
$A=2x^2+(-3)x+1$
$A=2x^2-3x+1$

4) Développement de *(a+b)(c+d)*:

Remarque: Aire (MNPQ) = Aire (MRVU)+Aire (UVTP)+Aire (RNSV)+Aire (VSQT)

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$



(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd

Cette égalité est vraie pour toutes les valeurs de a, b, c et d; on dit que c'est une identité.

ex: développement et réduction de $B = (x + 5)(2x + 1)$

$B = x\times2x + x\times1 + 5\times2x + 5\times1$ (développement)
$B = 2x^2 + x + 10x + 5$ (calcul)
$B = 2x^2 + (1 + 10)x + 5$ (réduction)
$B = 2x^2 + 11x + 5$

Comparaisons de nombres

a,b,c, et *x* désignent des nombres relatifs.

1) Comparaison de nombres relatifs:

a) Signe de la différence:

Comparer deux nombres revient à étudier le signe de leur différence.

Dire que $a<b$ signifie que $(a-b)<0$

Dire que $a=b$ signifie que $(a-b)=0$

Dire que $a>b$ signifie que $(a-b)>0$

$$\frac{2}{3}-\frac{35}{57}\approx 0{,}05 \quad \textit{donc} \quad \frac{2}{3}-\frac{35}{57}>0 \quad \textit{et} \quad \frac{2}{3}>\frac{35}{57}$$

$$\pi-\frac{22}{7}\approx -0{,}001 \quad \textit{donc} \quad \pi-\frac{22}{7}<0 \quad \textit{et} \quad \pi<\frac{22}{7}$$

b) Pour comparer des nombres en écriture fractionnaire on peut les réduire au même dénominateur.

Comparer $\frac{7}{8}$ et $\frac{11}{12}$; on a $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$ et $\frac{11}{12}=\frac{22}{24}$ on a donc $\frac{7}{8}<\frac{11}{12}$

c) Pour vérifier que deux fractions sont égales, on peut utiliser l'équivalence

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ équivaut à $a\times d=b\times c$ (b et d étant non nuls).

Les fractions $\frac{33}{21}$ et $\frac{55}{35}$ sont elles égales ? On fait $33\times 35=1155$ et $21\times 55=1155$ donc $\frac{33}{21}=\frac{55}{35}$

2) Addition et ordre:

Propriété: Dire que $a+b<a+c$ revient à dire que $b<c$.

Dire que $a+b>a+c$ revient à dire que $b>c$.

$$\textit{Soit } x \textit{ tel que } x>4 \quad \textit{alors} \quad x+6>4+6 \quad \textit{et} \quad x+6>10$$

$$\textit{Soit } x \textit{ tel que } x+7<2 \quad \textit{alors} \quad x+7-7<2-7 \quad \textit{et} \quad x<-5$$

3) Multiplication et ordre:

Propriété: Si a est nombre positif, non nul, alors

dire que $b<c$ revient à dire que $ab<ac$,

dire que $b>c$ revient à dire que $ab>ac$.

$$x \quad \textit{est un nombre tel que} \quad x>5 \quad \textit{alors} \quad 2x>2\times 5 \quad \textit{et} \quad 2x>10$$

$$x \quad \textit{est un nombre tel que} \quad 4x<-3 \quad \textit{alors} \quad \frac{1}{4}\times 4x<\frac{1}{4}\times(-1) \quad \textit{et} \quad x<-\frac{1}{4}$$

Attention!: $2<3$ mais $2\times(-5)=-10$ et $3\times(-5)=-15$ alors $2\times(-5)>3\times(-5)$

4) Encadrements et valeurs approchées:

Encadrement: Pour indiquer que x est compris entre a et b inclus, on écrit

$$a \leqslant x \leqslant b$$

On dit que l'on a un encadrement de x d'amplitude (b-a).

Troncature, arrondi:

$$x = \frac{22}{7} \approx 3{,}14285$$

La troncature de x au millièmes est 3,142.

Cela veut dire que $3{,}142 \leq x \leq 3{,}143$; (l'amplitude de l'intervalle est 0,001).

L'arrondi au millièmes est 3,143.

Cela veut dire que $3{,}1425 \leq x \leq 3{,}1435$; (l'amplitude de l'intervalle est 0,001).

Les équations

1) Définitions:

Si on écrit $3\times4+5=17$, on a une égalité.

Si on écrit $3x + 5 = 17$, on a une équation, dont x est l'inconnue et qui devient une égalité quand $x = 4$.

Les deux quantités de chaque côtés du signe = s'appellent membres de l'équation.

Résoudre une équation, c'est trouver la (ou les) valeur (s) de l'inconnue qui donne une égalité.

Cette valeur de l'inconnue s'appelle la solution de l'équation.

Dans notre exemple, la solution de l'équation est 4.

2) Des règles pour résoudre les équations:

On ne change pas les solutions d'une équation en ajoutant ou en retranchant le même nombre aux deux membres d'une équation.

ex1: $x – 9 = 17$ donc en ajoutant 9 aux deux membres on a :
$x – 9 + 9 = 17 + 9$ d'où $x = 26$.

ex 2: $3x + 4 = 2x – 5$ donc en retranchant $2x$ aux deux membres on a :
$3x + 4 – 2x = 2x – 5 – 2x$ d'où $x + 4 = – 5$ et en retranchant 4 aux deux membres on a $x + 4 – 4 = – 5 – 4$ soit $x = – 9$.

On ne change pas les solutions d'une équation en multipliant ou en divisant les deux membres d'une équation par un même nombre, non nul.

ex3: $6x=18$ donc en multipliant les deux membres par $\frac{1}{6}$ on a :

$\frac{1}{6}\times6x=\frac{1}{6}\times18$ soit $x = 3$.

ex4: $\frac{x}{7}=3$ donc en multipliant les deux membres par 7 on a :

$\frac{x}{7}\times7=7\times3$ soit $x = 21$.

3) Résolution d'équation:

$3x + 8 = 5x – 6$

on ajoute -8 aux deux membres :

$3x + 8 – 8 = 5x – 6 – 8$

$3x = 5x -14$

on ajoute $– 5x$ aux deux membres :

$3x – 5x =5x -14 -5x$

$-2x = -14$

on multiplie les deux membres par $-\frac{1}{2}$:

$-\frac{1}{2}\times2x=-14\times(-\frac{1}{2})$

$x = 7$

4) Problème et équation :

Pour mettre un problème en équation, on passe par les étapes suivantes:
choix de l'inconnue, (généralement en relisant la question)
mise en équation en lisant attentivement le texte,
résolution de l'équation,
phrase de réponse .

Exemple : trouver cinq nombres entiers consécutifs dont la somme est 1 515.
On appelle x le plus petit des cinq nombres.
Les nombres consécutifs sont alors : x ; $x + 1$; $x + 2$; $x + 3$; $x + 4$.

On a $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 1\,515$ et

$5x + 10 = 1\,515$ soit

$5x + 10 - 10 = 1\,515 - 10$ et

$5x = 1\,505$ d'où

$\frac{1}{5} \times 5\,x = 1505 \times \frac{1}{5}$ donc

$x = 301$.

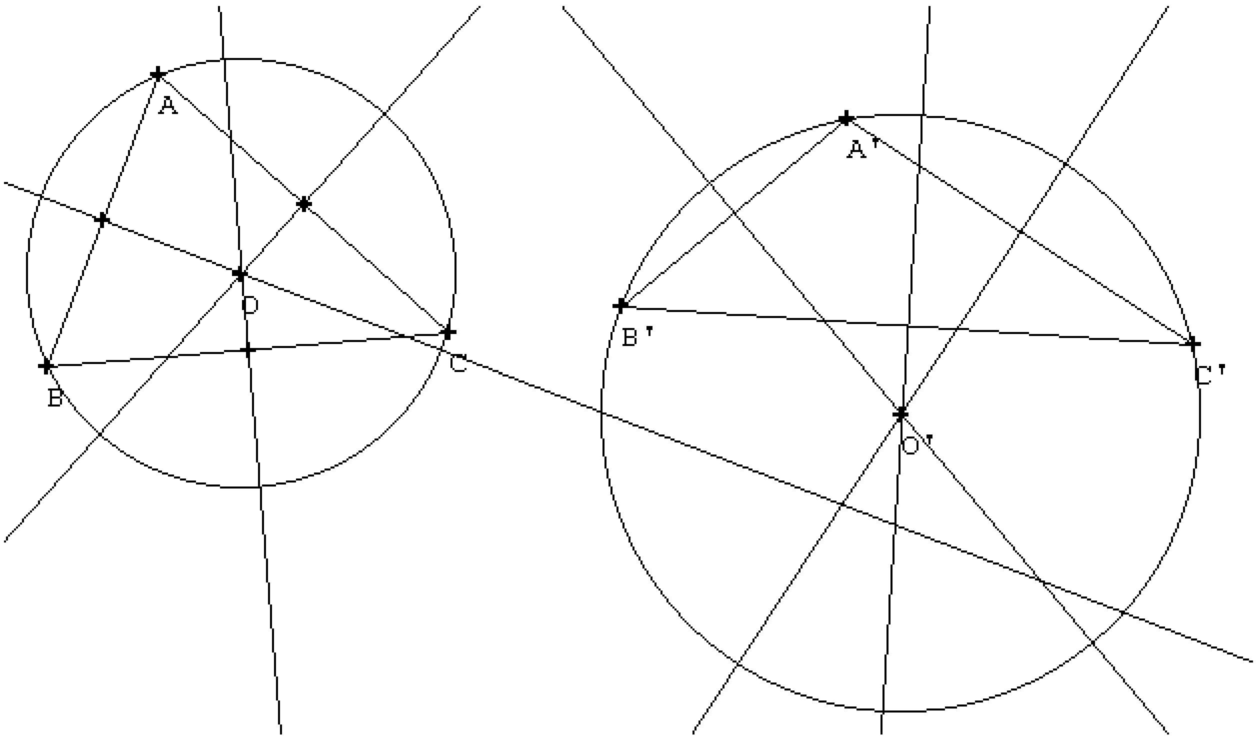
Les cinq nombres entiers consécutifs sont 301, 302, 303, 304, 305

Des droites remarquables dans le triangle

1) Médiatrices, cercle circonscrit:

Rappels: La médiatrice du segment [AB] est la droite perpendiculaire au milieu du segment [AB].
Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.

Propriété: Les médiatrices des trois côtés d'un triangle se coupent en un même point. Ce point, équidistant des trois sommets du triangle, est le centre du cercle circonscrit au triangle.



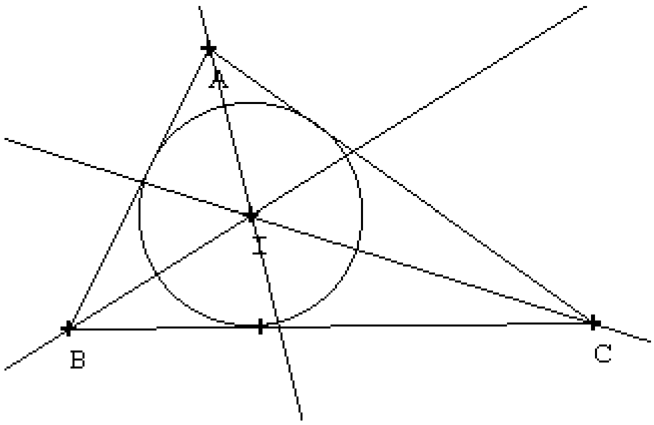
Le cercle circonscrit au triangle

2) Bissectrices, cercle inscrit:

Rappels: La bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ est la demi-droite issue de A qui partage l'angle en deux angles de même mesure.

La bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ est axe symétrie pour cet angle.

Propriété: Les bissectrices des trois angles d'un triangle se coupent en un même point. Ce point , équidistant des trois côtés du triangle, est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés: le cercle inscrit dans le triangle.

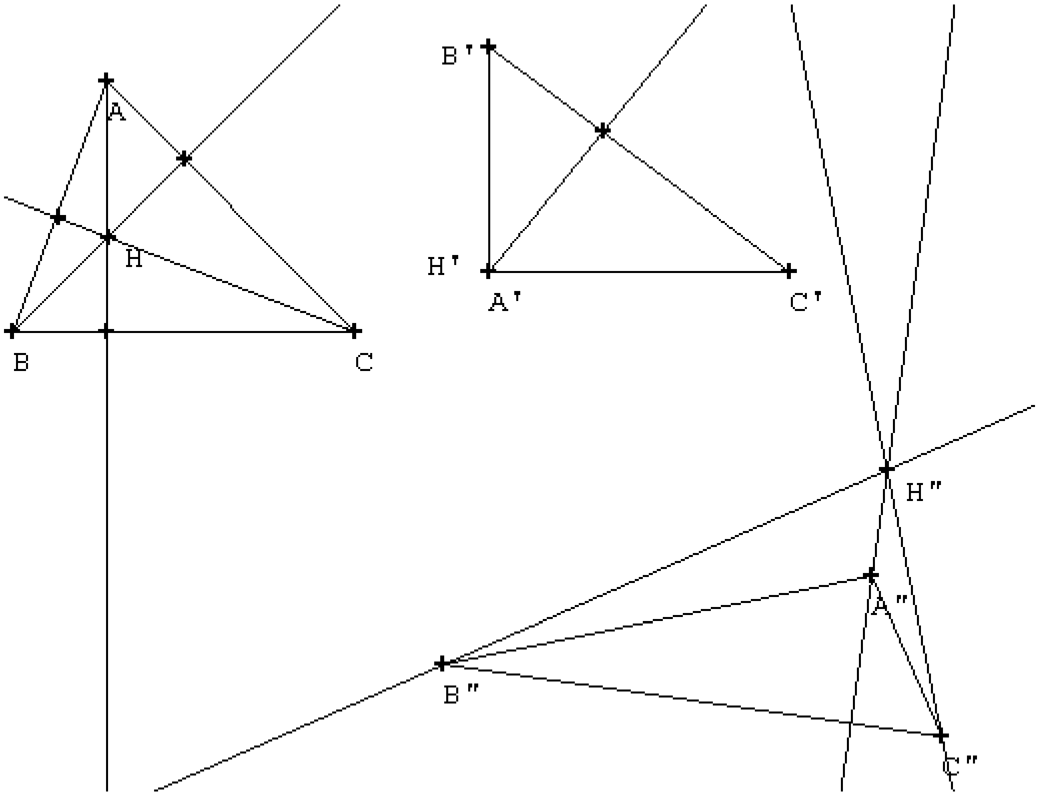


Le cercle inscrit dans le triangle

3) Hauteurs, orthocentre:

Rappel: on appelle hauteur d'un triangle une droite issue d'un sommet et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Propriété: Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point. Ce point s'appelle l'orthocentre du triangle.

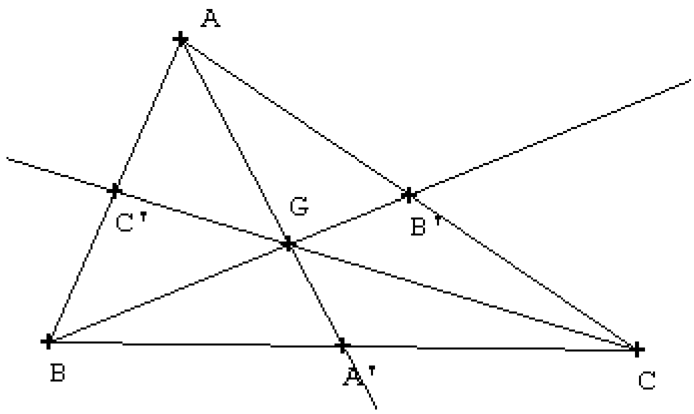


L'orthocentre du triangle

4) Médianes, centre de gravité:

Rappel: on appelle médiane d'un triangle une droite issue d'un sommet passant par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Propriété: Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point. Ce point s'appelle centre de gravité du triangle. Ce point est situé aux deux tiers des segments qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés à ces sommets.



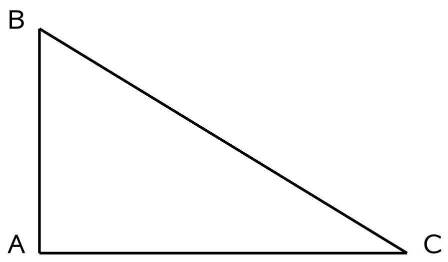
$$\frac{AG}{AA'} = \frac{BG}{BB'} = \frac{CG}{CC'} = \frac{2}{3}$$

Le centre de gravité du triangle

La propriété de Pythagore

1) Le triangle rectangle:

Un triangle rectangle est un triangle ayant un angle droit.
Le côté opposé à l'angle droit est l'hypoténuse.
Dans un triangle rectangle le plus grand côté est l'hypoténuse.



Le triangle ABC est rectangle en A

[AB] et [AC] sont les côtés de l'angle droit

[BC] est l'hypoténuse

2) La propriété de Pythagore:

Dans un triangle rectangle le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Remarques: Cette propriété ne s'applique qu'aux triangles rectangles!

Cette propriété permet de calculer la longueur d'un côté du triangle rectangle connaissant les deux autres.

L'usage de la touche $\sqrt{}$ de la calculette est souvent nécessaire.

Exemples:

ABC triangle rectangle en A avec AC=9 et BC=15. Calculer AB.

La propriété de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A donne: $BC^2 = AB^2 + AC^2$; donc

$15^2 = AB^2 + 9^2$

$225 = AB^2 + 81$ et $AB^2 = 225 - 81 = 144$

$AB^2 = 144$ donc $AB = \sqrt{144} = 12$

3) Réciproque de la propriété de Pythagore:

Si dans un triangle, la carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

L'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté.

Si dans un triangle ABC on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ce triangle est rectangle en A.

Exemples: a) Le triangle ABC avec AB=8 ; AC=18 et BC=20 est-il rectangle?

BC est le plus grand côté; on calcule $BC^2 = 20^2 = 400$

On calcule $AB^2 + AC^2 = 8^2 + 18^2 = 64 + 324 = 388$

Le triangle ABC n'est pas rectangle car $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

b) Le triangle MNP avec MN=3,3 ; NP=6,5 et PM=5,6 est-il rectangle?

NP est le plus grand côté; $NP^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$

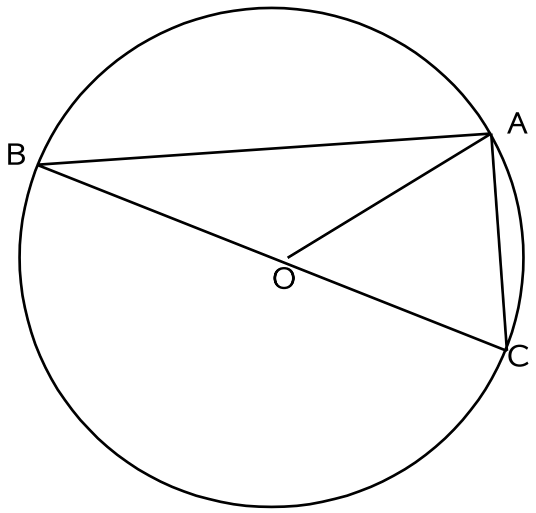
$MN^2 + MP^2 = 3{,}3^2 + 5{,}6^2 = 10{,}89 + 31{,}36 = 42{,}25$

Le triangle MNP est rectangle en M car $NP^2 = MN^2 + MP^2$

Cercles et triangles rectangles

1) Triangle, cercle et médiane:

Si un triangle est rectangle, le centre du cercle circonscrit au triangle est le milieu de l'hypoténuse.
La médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.



Le triangle ABC est rectangle en A

O est le centre du cercle circonscrit

OA=OB=OC

OA est la longueur de la médiane

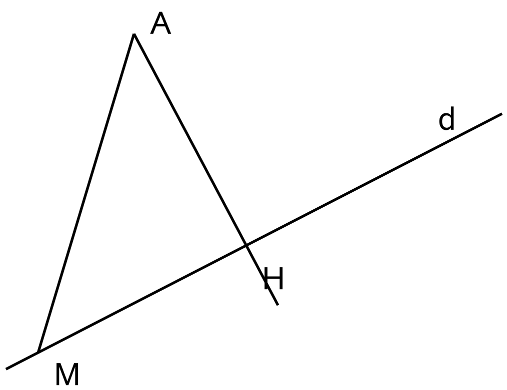
2) Réciproques:

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre on obtient un triangle rectangle.

Si dans un triangle, la médiane issue d'un sommet a une longueur égale à la moitié de la longueur du côté opposé alors le triangle est rectangle en ce sommet.

3) Distance d'un point à une droite:

Soit *d* une droite et A un point hors de cette droite.
Sur une droite *d*, le point le plus proche d'un point A non situé sur *d* est la point H tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à *d*.
AH est appelée la distance du point A à la droite *d*.



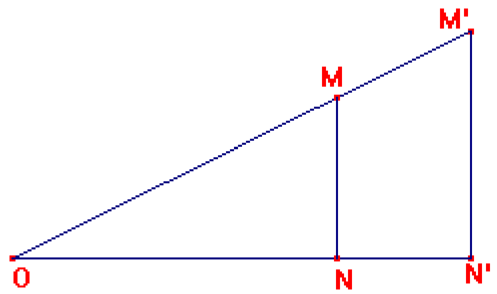
AH<AM pour tout point M

4) Tangente à un cercle en un point:

Une droite *d* est tangente en à un cercle (C) de centre O en un point A si la droite *d* a un seul point d'intersection avec le cercle (C): la point A.
Dans ce cas la droite *d* est perpendiculaire au rayon [OA].

Cosinus d'un angle aigu

1) Cosinus d'un angle aigu:



OMN et OM'N' sont deux triangles rectangles en M et M' qui ont même angle aigu Ô.

alors $\frac{OM}{ON}=\frac{OM'}{ON'}$

La valeur commune de ces rapports est appelée le "cosinus de l'angle Ô"

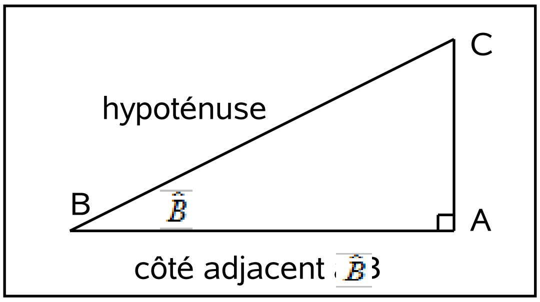
On la note cosÔ.

2) Dans le triangle rectangle:

ABC est un triangle rectangle en A.

Alors $\cos\hat{B} = \frac{BA}{BC}$

$\cos\hat{B} = \frac{\text{cote adjacent à } \hat{B}}{\text{hypotenuse}}$



Remarque: l'hypoténuse étant toujours le plus grand côté,

un cosinus est toujours compris entre 0 et 1.

3) Utilisation de la calculatrice:

Avant d'utiliser les touches [cos] ou [$\cos^{-1}$] de la calculatrice il faut s'assurer que le mode des angles est bien degré (DEG ou D affiché).

Calculs de cosinus:

cos 25°≈0,9063

cos 50°≈0,6428

Calculs d'angles à partir de cosinus:

$\cos x = 0,25$ alors $x \approx 75,5°$

$\cos y = 0,7$ alors $y \approx 45,5°$

calculs de côtés : dans un triangle rectangle en A, on a $\widehat{ABC}=35°$ et BC = 6; Calculer AB, au dixième.

On a $\cos\widehat{ABC}=\frac{AB}{BC}$ donc $AB=BC\times\cos\widehat{ABC}=6\times\cos 35°\approx 4,9$.

dans un triangle rectangle en A, on a $\widehat{ABC}=35°$ et AB=6; Calculer BC, au dixième.

On a $\cos\widehat{ABC}=\frac{AB}{BC}$ donc $BC\times\cos\widehat{ABC}=AB$ et $BC=\frac{AB}{\cos\widehat{ABC}}=\frac{6}{\cos 35°}\approx 7,3$

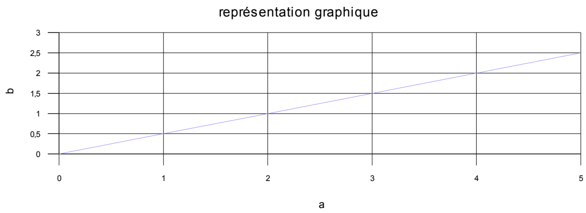
La proportionnalité

1) Proportionnalité et représentation graphique:

Deux grandeurs sont proportionnelles si l'on peut calculer la mesure de l'une en multipliant la mesure de l'autre par un nombre, toujours le même, appelé coefficient de proportionnalité.

Si on place sur un graphique les points obtenus à partir d'un tableau de proportionnalité, alors ces points sont alignés avec l'origine.

a	*1*	*2*	*4*	*5*
b	0,5	1	2	2,5



Les points (0;0) ; (1;0,5) (2;1) (4;2) et (5;2,5) sont bien alignés.

Si les points marqués sur un graphique sont alignés avec l'origine du repère, alors ils représentent une situation de proportionnalité.

2) Vitesse moyenne:

La vitesse moyenne *v* d'un mobile sur un parcours est le quotient de la distance parcourue *d* par la durée *t* du parcours.

Si *d* est en kilomètre et *t* en heure , alors *v* est en kilomètre par heure (km.h^{-1}).

$$v=\frac{d}{t} \qquad ou \qquad d=vt$$

Distance parcourue	*d*	
Durée du trajet	t	

est un tableau de proportionnalité. Attention aux unités!

exemple: Une voiture parcourt 135 km en 1h30min. Quelle est sa vitesse moyenne?

$$d=135\,km \qquad t=1{,}5\,h \qquad donc \qquad v=\frac{135}{1{,}5}=90 \qquad v=90\,km.h^{-1}$$

3) Pourcentages:

Pour augmenter un nombre de *x* %, on le multiplie par $1+\frac{x}{100}$

Exemple: Un article coûte 200€, son prix augmente de 3%. Quel est son nouveau prix ?

$$200\times\left(1+\frac{3}{100}\right)=200\times1{,}03=206$$

L'article coûte 206 €.

Pour diminuer un nombre de *x* %, on le multiplie par $1-\frac{x}{100}$

Exemple: Un article coûte 150€, son prix diminue de 5%. Quel est son nouveau prix ?

$$150\times\left(1-\frac{5}{100}\right)=150\times0{,}95=142{,}5$$

L'article coûte 142,50 €.

Exploitation de données statistiques

1) Effectifs cumulés:

Dans un tableau statistique dont les valeurs sont rangées par ordre croissant (ou décroissant), l'effectif cumulé croissant (ou décroissant) d'une valeur s'obtient en ajoutant à cet effectif les effectifs des valeurs qui la précédent.

Exemple: On a demandé aux 25 membres d'un club sportif la distance *d* (en km) entre leur domicile et le stade

Distance d	0<d<1	1<d<5	5<d<10	10<d<30	Total
Effectif	2	12	7	4	25

d<...	1	5	10	30
Effectifs cumulés	2	14	21	25

Il y a par exemple 21 personnes qui habitent à 10km ou moins du stade.

2) Fréquences cumulées:

La fréquence cumulée s'obtient en divisant l'effectif cumulé par l'effectif total.

Distance d	0<d<1	1<d<5	5<d<10	10<d<30	Total
Effectif	2	12	7	4	25
Fréquence en %	8	48	28	16	100
Frequence cumulée	8	15	84	100	

(note: fréquence=effectif÷total×100)

Il y a par exemple 84% des personnes qui habitent à 10km ou moins du stade.

3) Moyenne pondérée:

Exemple 1 : Les résultats de Raoul sont 14; 10; 14; 8 et 6.

La moyenne *M* des 5 notes est donnée par:

$$M = \frac{14+10+14+8+6}{5} = \frac{52}{5} = 10,4$$

Exemple 2 : moyenne d'une série d'effectifs.

Notes	*8*	*10*	*12*	*15*
Effectifs	2	4	3	1

La moyenne *M* des notes du tableau ci-dessus est donnée par:

$$M = \frac{2\times 8 + 4\times 10 + 3\times 12 + 1\times 15}{2+4+3+1} = \frac{107}{10} + 10,7$$

Cette moyenne est dite pondérée pour indiquer que chaque note est affectée d'un effectif.

Pyramides et cônes de révolution

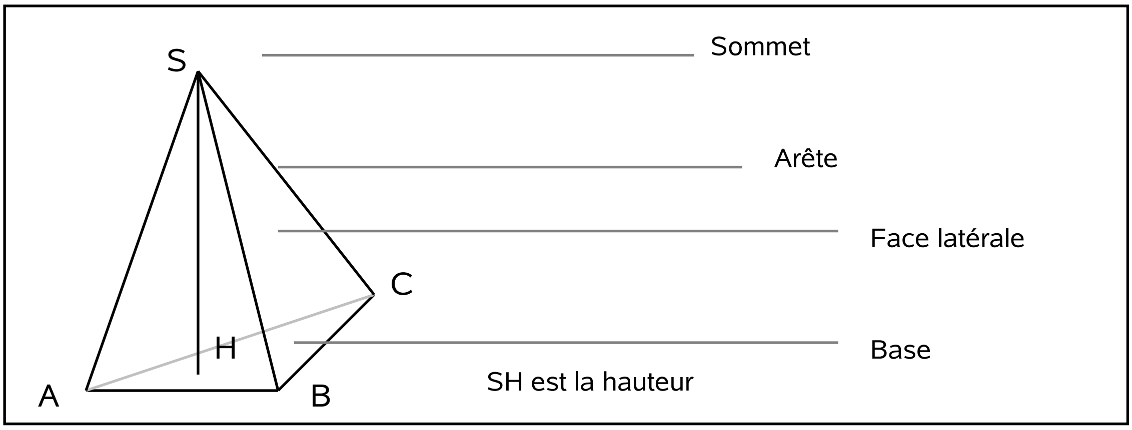
1) Les pyramides:

Une pyramide de sommet S est un solide délimité par:

- sa base : c'est la face qui ne contient pas S (triangle; quadrilatère ...)
- ses faces latérales : ce sont des triangles de sommet S dont un des côtés est sur la base.

La hauteur d'une pyramide de sommet S est le segment [SH] perpendiculaire au plan de la base (avec H point de ce plan).

La longueur du segment [SH] est aussi appelée hauteur de la pyramide.



Une pyramide de sommet S est dite régulière lorsque:

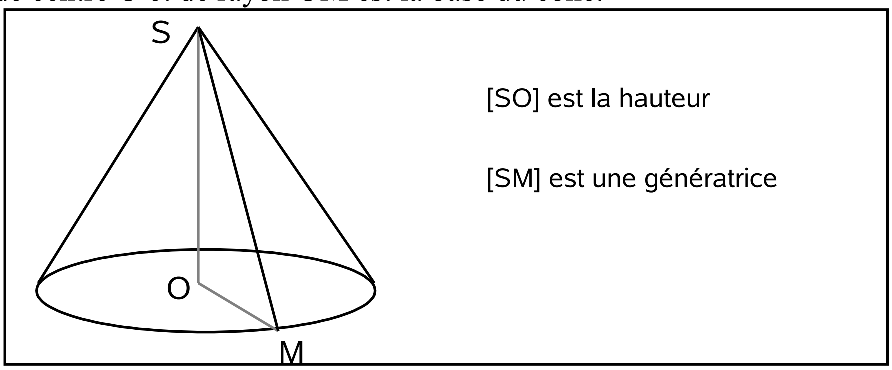
- sa base est un polygone régulier de centre O (triangle équilatéral, carré ...)
- sa hauteur est [SO].

Une pyramide régulière a des faces latérales composées de triangles isocèles superposables.

2) Les cônes de révolution:

Un cône de révolution de sommet S est le solide engendré par la rotation d'un triangle SOM, rectangle en O, autour de la droite (SO).

Le disque de centre O et de rayon OM est la base du cône.



Un cône de révolution a pour sommet S et pour base un disque de centre O.

La hauteur de ce cône est le segment [SO] (ou la longueur SO).

Le segment [SO] est perpendiculaire à la base.

3) Volumes:

Le volume V d'une pyramide ou d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de sa hauteur h par l'aire B de sa base.

$$V = \frac{1}{3} B \times h \qquad ou \qquad V = \frac{B \times h}{3}$$